Lycée FABERT MP

Programme semaine 13

Suites et séries de fonctions

colles

Notions de convergence

Fonctions d'une partie d'un EVN de dimension finie dans un EVN de dimension finie.

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale (dans le cas des séries de fonctions), convergence uniforme sur tout segment (dans le cas où l'ensemble de définition est un intervalle de $\mathbb{R}$; cela implique la convergence au voisinage de tout point).

Continuité, limite

Fonctions d'une partie d'un EVN de dimension finie dans un EVN de dimension finie.

Continuité de la limite uniforme de fonctions continues (continuité en un point, continuité globale).

Théorème de la double limite.

Intégration

Fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f alors la suite des primitives $(F_n)_n$ nulles en a converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de f nulle en a.

Si la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ converge uniformément sur le segment S alors on peut intervertir $\int$ et lim : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_S f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_S \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Dérivation

Fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si une suite $(f_n)_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur I vers une fonction f et que sa suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g alors f est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée g.

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Théorèmes d'approximation uniforme

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme de fonctions en escaliers.

Théorème de Weiestrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales (ADMIS).

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 8, 10, 14, 16, 17, 18, 48
(l'exercice 18 utilise quelques connaissances sur les séries entières).