Programme semaine 1

Révisions d'algèbre linéaire ; sous-espaces stables

Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel.

Somme de sous-espaces vectoriels $F_1,\dots,F_m$. Somme directe de $F_1,\dots,F_m$.

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire.

Une composée d'applications linéaires est linéaire.

Si E et F sont des K-espaces vectoriels alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un K-espace vectoriel.

Si E est un K-espace vectoriel alors $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition.

Formule $u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m} u^k v^{m-1-k}$ où $m \in \mathbb{N}$ et u et v sont deux endomorphismes qui commutent ; formule du binôme de Newton.

Si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire alors l'image directe de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F et l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est nul.

Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et F un espace vectoriel. Étant donnés des vecteurs $y_1,\dots,y_n \in F$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall j \in [\![1;n]\!],\ u(e_j) = y_j$.

Soient deux espaces vectoriels $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ et F. Étant données des applications linéaires $u_1 \in \mathscr{L}(F_1,F)$, ..., $u_m \in \mathscr{L}(F_m,F)$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall j \in [\![1;m]\!],\ u|_{F_j} = u_j$.

Projecteurs

Projecteurs associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et plus généralement à une décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.

Soit E un espace vectoriel. Une application $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur si et seulement si p est linéaire et $p^2 = p$. Dans ce cas p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ (ensemble des points fixes de p), parallèlement à $\ker p$.

Définition d'une symétrie. Soit E un espace vectoriel. Une application $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s^2 = \mathrm{id}_E$. Dans ce cas s est la symétrie sur $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ (ensemble des points fixes de s), parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$ (ensemble des points envoyés sur leur opposé par s).

Groupe linéaire

Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Définition d'un automorphisme. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ d'un espace vectoriel E (ensemble des automorphismes de E).

Familles

Familles libres, génératrices, bases.

Théorème de la base incomplète.

Soient deux espaces vectoriels E et F. Étant donnée une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E et des vecteurs quelconques $y_1,\dots,y_p$ de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall j \in [\![1;p]\!],\ u(e_j) = y_j$.

Dimension

Espace vectoriel de dimension finie.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments, appelé dimension de E. Toutes les familles libres de E ont au plus n éléments, toutes les familles génératrices de E ont au moins n éléments. Une famille libre ou génératrice de E qui possède n vecteurs est une base de E.

Deux espaces isomorphes ont même dimension.

Si F sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leqslant \dim E$. Si de plus $\dim F = \dim E < +\infty$ alors $F = E$.

Rang d'une famille de vecteurs.

Sommes directes en dimension finie

Base adaptée à une somme directe.

Soient $F_1 \dots F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de bases respectives $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_m$. On a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ si et seulement si la famille obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_m$ est une base de E.

$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_m) = (\dim F_1) + \dots + (\dim F_m)$.

CNS pour avoir $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ à l'aide des dimensions de $F_1,\dots,F_m,E$.

Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Rang d'une application linéaire

Définition.

Théorème du rang.

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\dim E = \dim F < +\infty$ alors : u injection $\iff$ u surjection.

Formule de Grassmann : $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

Systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Rang d'un système linéaire.

L'ensemble solution d'un système linéaire homogène de rang r à p inconnues est un sous-espace vectoriel de K^p de dimension $p - r$.

Cas d'un système linéaire : ses solutions sont les vecteurs de la forme « une solution particulière » + « une solution du système linéaire homogène associé ».

Matrices

Opérations sur les matrices.

Matrices inversibles, groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$.

Transposition (notation : M^T ou ${}^tM$), matrices symétriques, antisymétriques.

Dimension de l'espace des matrices symétriques, de l'espace des matrices antisymétriques, ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(K)$ supplémentaires.

Matrices diagonales, triangulaires.

Matrice d'une famille de vecteurs, matrices de passage d'une base à une autre.

Matrice d'une application linéaire.

Formules de changement de base.

Rang d'une matrice.

Le rang de A est le rang de toute famille de vecteurs de matrice A, de toute application linéaire de matrice A.

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Matrices semblables

Définition.

L'application $A \longmapsto PAP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le produit.

λI_n est la seule matrice semblable à λI_n.

Matrices par blocs

Définition.

Opérations sur les matrices par blocs : combinaisons linéaires, produit, transposition

Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u, de l'endomorphisme de F alors induit par u.

Exemple : si deux endomorphismes u et v commutent, alors $\ker v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F.

Caractérisation des endomorphismes de $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ stabilisant les sous-espaces vectoriels $F_1 \ldots F_m$ par leur matrice dans une base de E adaptée à $F_1, \ldots, F_m$.

Trace

Trace d'une matrice carrée.

La trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$.

$\forall A \in \mathrm{M}_n(K),\ \ \mathrm{tr}\, {}^tA = \mathrm{tr}\, A$.

$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(K),\ \ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Deux matrices semblables ont même trace.

Trace d'un endomorphisme.

La trace d'un projecteur est son rang.

Exercices de la banque CCP **à préparer** : 60, 64 et 71.