Programme semaines 5 et 6

Réduction des endomorphismes

On note K un corps (on prend en pratique $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Valeurs propres, vecteurs propres

En dimension quelconque

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.

Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes est libre.

Si deux endomorphismes commutent, l'un stabilise les sous-espaces propres de l'autre.

En dimension finie

Spectre d'un endomorphisme : ensemble de ses valeurs propres.

Polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$:

- Ses racines sont les valeurs propres de u.
- Il est de degré $n = \dim E$.
- Il est unitaire.
- Son coefficient de degré $n-1$ est $-\operatorname{tr} u$.
- Son terme constant est $(-1)^n \det u$.

Multiplicité d'une valeur propre.

Il existe au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicités.

Si χ_u est scindé, alors :

- La somme des valeurs propres de u, comptées avec multiplicités, est $\operatorname{tr} u$.
- Le produit des valeurs propres de u, comptées avec multiplicités, est $\det u$.

Cas des matrices

On étend les définitions précédentes à une matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ en considérant l'endomorphisme $u_A \in \mathscr{L}(K^n)$ canoniquement associé à A.

Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux (et la multiplicité d'une valeur propre est son nombre d'occurrences sur la diagonale).

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (donc mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités).

Si $A = {}^tB$ alors A et B ont même polynôme caractéristique.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la matrice d'un endomorphisme u dans une base $\mathscr{B}$, alors A et u ont même polynôme caractéristique.

Endomorphismes induits

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme stabilisant un sous-espace vectoriel F de E. Alors χ_v divise χ_u.

Application :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda,$$

où $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$ est la dimension du sous-espace propre de valeur propre λ, et m_λ est la multiplicité de λ comme valeur propre de u.

Polynôme en un endomorphisme ou en une matrice

Définitions

Polynôme en un endomorphisme ou en une matrice.
Polynôme annulateur.

Lien avec les valeurs propres

Soit un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ admettant une valeur propre $\lambda \in K$:

— Si $P \in K[X]$ alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.
— En particulier : si P annule u alors λ est racine de P.

Théorème de Cayley-Hamilton (démonstration non exigible)

Lemme des noyaux

Polynôme minimal

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a un morphisme d'algèbres $\varphi : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$

— Son image $K[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$.
— Son noyau $\ker\varphi$ est l'idéal des polynômes qui annulent u. Cet idéal étant non nul, il est engendré par un unique polynôme unitaire Π_u, appelé le *polynôme minimal* de u.

Quelques caractérisations du polynôme minimal de u :

$$\Pi_u \text{ unitaire} \quad \text{et} \quad \ker\varphi = \langle \Pi_u \rangle$$

$$\Pi_u \text{ unitaire} \quad \text{et} \quad \forall P \in K[X],\ P(u) = 0 \iff \Pi_u | P$$

$$\Pi_u \text{ unitaire et } \Pi_u(u) = 0 \text{ et } \forall P \in K[X],\ P(u) = 0 \Longrightarrow [P = 0 \text{ ou } \deg \Pi_u \leqslant \deg P]$$

Selon le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $\Pi_u \mid \chi_u$
et donc : $\deg \Pi_u \leqslant \dim E$.

Si u stabilise un sous-espace vectoriel F, on a, en notant $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme induit par v :

$$\Pi_v \mid \Pi_u.$$

Diagonalisation

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

• Les conditions suivantes sont des CNS pour que u soit diagonalisable :

(1) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de u.

(2) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E où la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ de u est diagonale.

(3) $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} E_\lambda(u)$.

(4) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} E_\lambda(u)$.

(5) $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} \dim E_\lambda(u)$.

(6) Le polynôme χ_u est scindé sur K et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ d_\lambda = m_\lambda$ (notations de la page 1).

(7) Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

(8) Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

(9) Le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} (X - \lambda)$ annule u.

Le polynôme minimal est alors $\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} (X - \lambda)$.

• La condition suivante est une CONDITION SUFFISANTE pour que u soit diagonalisable :

(10) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé à racines simples.

Les sous-espaces propres de u sont alors tous de dimension 1.

• Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note v l'endomorphisme de F induit par u. Si u est diagonalisable, alors v aussi.

• Méthode pour diagonaliser

• Théorème spectral (admis provisoirement) :
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Trigonalisation

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

• L'endomorphisme u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

• Les conditions suivantes sont des CNS pour que u soit trigonalisable :

(1) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

(2) Il existe des sous-espaces vectoriels u-stables $F_0, \dots, F_n$ de E tels que :

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0;n]\!],\ \dim F_k = k.$$

(3) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K.

(4) Le polynôme minimal de u est scindé sur K.

(5) Il existe un polynôme scindé sur K qui annule u.

• Soient E un K-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si un polynôme scindé $P(X)$ annule u, le lemme des noyaux fournit une décomposition de E en somme directe de sous-espaces u-stables sur chacun desquels l'endomorphisme induit par u est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.
Interprétation matricielle.

• Exemples de trigonalisations de matrices.

Endomorphismes nilpotents

• Définition ; indice de nilpotence

• On suppose que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$.
Les conditions suivantes sont des CNS pour que A soit nilpotente :

(1) $\exists N \in \mathbb{N},\ \Pi_A(X) = X^N$

(2) $\chi_A(X) = X^n$

(3) $A^n = 0$

(4) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

(5) A trigonalisable sur K, de seule valeur propre 0.

(6) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathrm{M}_n(K)$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Idem pour les endomorphismes en dimension finie, sauf (4) si $K \neq \mathbb{C}$.

Exercices de la banque CCP **à préparer** :

<u>semaine 5 :</u> 65, 67, 73, 93
<u>semaine 6 :</u> 59, 62, 69, 72, 83
<u>prévisions semaine 7 :</u> 70, 88, 91 + fonctions convexes