

PROGRAMME SEMAINE 8

Quelques révisions d'analyse : suites, fonctions continues

Le programme porte sur les points du programme de Sup qui sont généralisés dans le chapitre de Spé sur les EVN.

Il s'agit d'un programme de révisions de première année : les connaissances exigibles ne se limitent pas à la liste qui suit.

On doit par exemple bien entendu savoir

- *obtenir la monotonie d'une fonction sur un intervalle à partir du signe de sa dérivée.*
- *obtenir des relations de comparaison à partir du théorème de Taylor-Young (ou des développements limités usuels).*

Suites réelles et complexes

Suite convergente. Limite (finie ou infinie si la suite est réelle).

Toute suite convergente est bornée.

Théorème des gendarmes.

Passage à la limite dans une inégalité large.

Si un réel λ minore strictement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, alors λ minore strictement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Théorème de la limite monotone (toute suite monotone admet une limite, éventuellement infinie)

Partie dense de \mathbb{R} . Densité des rationnels, des décimaux, des irrationnels.

Caractérisation séquentielle de la densité d'une partie de \mathbb{R} .

Théorème des suites adjacentes.

Suites extraites. Si une suite admet une limite, ses suites extraites admettent la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass (démonstration non exigible).

Fonctions continues

Limite d'une fonction. Fonction continue en un point. Fonction continue.

Si une fonction f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Théorème des gendarmes.

Passage à la limite dans une inégalité large.

Si un réel λ minore strictement $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, alors λ minore strictement f au voisinage de a .

Théorème de la limite monotone.

Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.

Prolongement par continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (démonstration non exigible). L'image continue d'un segment est un segment.

Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone (démonstration non exigible).

La bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est continue.

Fonctions uniformément continues. Théorème de Heine.

Fonctions lipschitziennes.

Relations de comparaison

o \mathcal{O} et \sim pour les suites et les fonctions

Exercices de la banque CCP à préparer : 1, 43, 3, 4
(les exercices 3 et 4 concernent en fait la dérivabilité).