Programme semaine 9

Espaces vectoriels normés

sauf la compacité & la connexité par arcs

Normes

Norme (sur un espace vectoriel réel ou complexe). Distance associée. Boules. Sphères. Les boules sont convexes.

Norme associée à un produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz, de Minkowski.

Parties bornées, fonctions bornées, suites bornées.

Normes usuelles :

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur K^n et $\mathscr{C}^0([a;b],K)$ où $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées d'un ensemble X vers un EVN E.

Produits d'EVN.

Normes équivalentes.

Théorème fondamental : sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (ADMIS).

Suites convergentes de vecteurs

Toute suite convergente est bornée. Linéarité de la limite.

La convergence d'une suite et sa limite sont conservées quand on remplace la norme par une norme équivalente.

Convergence d'une suite en dimension finie.

Convergence d'une suite de vecteurs d'un EVN produit.

Topologie d'un EVN

Voisinage, intérieur, adhérence, frontière, ouvert, fermé, partie dense.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence, des fermés, de la densité.

Intersections et réunions d'ouverts, de fermés.

Toutes ces notions sont conservées quand on remplace la norme par une norme équivalente.

Topologie induite sur une partie : voisinages relatifs, ouverts relatifs, fermés relatifs.

$\boxed{\text{Limites de fonctions ; continuité}}$

Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.

Caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts, des fermés.

Deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Toute fonction uniformément continue est continue.

Exemples :
la norme est 1-lipschitzienne ; la distance à une partie $x \longmapsto \mathrm{d}(x,A)$ est 1-lipschitzienne.

Toutes ces notions (limite, continuité, continuité uniforme, fonctions lipschitziennes) sont conservées quand on remplace la norme par une norme équivalente ; seules les constantes de Lipschitz peuvent changer.

Description des applications linéraires continues, des applications multilinéraires continues.

L'application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est continue si E est de dimension finie.

L'application m-linéaire $u : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ est continue si $E_1, \ldots, E_m$ sont de dimension finie.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toute application polynomiale est continue.

Continuité du déterminant.

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 34, 35, 36, 37