

## PROGRAMME SEMAINE 14

### Séries entières

*Bien sûr, le chapitre sur les suites et séries de fonctions doit être très bien connu.*

#### Rayon de convergence

Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque ouvert de convergence.

Comparaison des rayons de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  lorsque  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  et lorsque  $a_n \sim b_n$ .

Somme de deux séries entières, produit de Cauchy de deux séries entières.

Invariance du rayon de convergence par dérivation terme à terme.

Utilisation de la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence.

#### Séries entières d'une variable complexe

La convergence de la série entière est normale sur tout disque fermé de rayon strictement inférieur au rayon de convergence.

La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

DSE de  $\exp z$  sur  $\mathbb{C}$ .

DSE de  $\frac{1}{1-z}$  sur le disque unité ouvert.

#### Séries entières d'une variable réelle

Une série entière converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence  $]-R; R[$ .

Sa somme est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; on peut la dériver terme à terme.

Lien entre les coefficients et les dérivées successives en 0.

Primitives de la somme d'une série entière.

#### Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction DSE sur un intervalle  $]-r; r[$ , unicité de son DSE.

DSE  $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ .

Série de Taylor d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

DSE de  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$ ,  $\text{Arctan}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

Application à la recherche de solutions d'équations différentielles.

*Exercices de la banque CCP à préparer : 2, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51*