Programme semaine 16

Intégration 2/2

1 Intégrales convergentes

2 Intégrales absolument convergentes

3 Intégration des relations de comparaison

4 Comparaison série-intégrale

5 Théorème de convergence dominée

6 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}_m^0(I,K)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux.
Soit $S \in \mathscr{C}_m^0(I,K)$ une fonction continue par morceaux.
On suppose :

$$\begin{cases} \text{La série de fonctions } \displaystyle\sum_n f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est intégrable sur } I \\ \text{La série } \displaystyle\sum_n \int_I |f_n| \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors la fonction S est intégrable sur I et on a :

$$\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

7 Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soient A une partie d'un EVN de dimension finie et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit une fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & K \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$

On suppose :

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} \forall t \in I, & A & \longrightarrow & K & \text{est continue} \\ & x & \longmapsto & f(x,t) & \\ & & & & \\ \forall x \in A, & I & \longrightarrow & K & \text{est continue par morceaux} \\ & t & \longmapsto & f(x,t) & \end{array} \right.$$

On suppose de plus (*hypothèse de domination*) qu'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{array} \right.$$

Alors la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array}$$

est continue.

Variante avec hypothèse de domination sur tout segment

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f : A \times I \longrightarrow K$ une fonction.

On suppose que $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t (cf énoncé précédent).

On suppose de plus (*hypothèse de domination sur tout segment*) que pour tout segment $S \subseteq A$ il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in S,\ \forall t \in I,\ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi_S(t) \\ \varphi_S \text{ est intégrable sur } I \end{array} \right.$$

Alors la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array}$$

est continue.

b) Théorème de dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz)

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f : A \times I \longrightarrow K$ une fonction.

$\boxed{\text{On suppose}}$:
• que $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ rapport à x et continue par morceaux et intégrable par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \forall t \in I, & A & \longrightarrow & K & \text{est de classe } \mathscr{C}^1 \\ & x & \longmapsto & f(x,t) & \\ & & & & \\ \forall x \in A, & I & \longrightarrow & K & \text{est continue par morceaux et intégrable} \\ & t & \longmapsto & f(x,t) & \end{array}\right.$$

• que $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lllll} \forall x \in A, & I & \longrightarrow & K & \text{est continue par morceaux} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) & \end{array}$$

• (hypothèse de domination) qu'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Alors}}$ la fonction :

$$\begin{array}{llll} g : & A & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\, dt \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et on a (formule de Leibniz) :

$$\forall x \in A,\ \ g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Variante avec hypothèse de domination sur tout segment

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f : A \times I \longrightarrow K$ une fonction.

$\boxed{\text{On suppose}}$:

• que $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ rapport à x et continue par morceaux et intégrable par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est de classe } \mathscr{C}^1 \\ \\ \forall x \in A, \quad \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est continue par morceaux et intégrable} \end{cases}$$

• que $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \quad \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \quad \text{est continue par morceaux}$$

• (hypothèse de domination sur tout segment) que pour tout segment $S \subseteq A$ il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in S,\ \forall t \in I, \quad \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi_S(t) \\ \varphi_S \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$$

$\boxed{\text{Alors}}$ la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et on a (formule de Leibniz) :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

b) Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f : A\times I \longrightarrow K$ une fonction. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{On suppose}}$:

• que $(x,t)\longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ rapport à x, c'est-à-dire :

$$\forall t\in I,\quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est de classe } \mathscr{C}^k$$

• que $f,\ \dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dots,\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$ sont continues par morceaux et intégrables par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\forall j\in[\![0;k-1]\!],\forall x\in A,\quad \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{est continue par morceaux} \\ \text{et intégrable} \end{array}$$

• que $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux par rapport à t, c'est-à-dire :

$$\forall x\in A,\ :\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t) \end{array} \quad \text{est continue par morceaux}$$

• (hypothèse de domination) qu'il existe une fonction $\varphi : I\longrightarrow\mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\begin{cases} \forall x\in A,\ \forall t\in I,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t) \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$$

$\boxed{\text{Alors}}$ la fonction :

$$g:\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$, et on a (formule de Leibniz) :

$$\forall x\in A,\ \ g^{(k)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt.$$

Variante avec hypothèse de domination sur tout segment

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note a et b les bornes de I. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f : A \times I \longrightarrow K$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{On suppose}}$:

• que $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ rapport à x.

• que f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$ sont continues par morceaux et intégrables par rapport à t.

• que $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux par rapport à t.

• (hypothèse de domination sur tout segment) que pour tout segment $S \subseteq A$ il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in S,\ \forall t \in I,\ \left| \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi_S(t) \\ \varphi_S \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$$

$\boxed{\text{Alors}}$ la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g : & A & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$, et on a (formule de Leibniz) :

$$\forall x \in A,\ \ g^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt.$$

8 Exercices

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 19, 27, 29, 30, 49, 50