Programme semaines 17 & 18

Probabilités

1 Rappels sur les ensembles

Dénombrement des ensembles finis. Ensembles dénombrables.

2 Espaces probabilisés

2.1 Définitions

Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Événement élémentaire (=singleton).
Évenement impossible ($= \emptyset$).
Événement certain ($= \Omega$).
Évenement presque impossible ou négligeable (= de probabilité nulle).
Événement presque certain ou presque sûr (= de probabilité 1).
Événements incompatibles (= d'intersection vide).
Système complet d'événements (= famille d'événements deux à deux incompatibles et de réunion Ω).

2.2 Propriétés

Proposition 1 (continuité croissante) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (*ie* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1}$) alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Proposition 2 (continuité décroissante) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (*ie* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subseteq A_n$) alors

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Proposition 3 (sous-additivité) Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

2.3 Exemples

Probabilité uniforme sur un ensemble fini non vide.
Probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble dénombrable.

3 Conditionnement

Probabilité conditionnelle de A sachant B : $P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, où
$\begin{cases} A, B \in \mathscr{A} \\ P(B) \neq 0 \end{cases}$
On a donc : $P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$.
L'application $P_B : \mathscr{A} \longrightarrow [0;1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Proposition 4 (Formule des probabilités composées) Soient $A_1, \ldots, A_N$ des événements.
On suppose $P(A_1\cap\cdots\cap A_{N-1}) \neq 0$.
Alors $P(A_1\cap\cdots\cap A_N) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{N-1}}(A_N)$.

Proposition 5 (formule des probabilités totales)

— <u>avec un système complet fini d'événements :</u>
Soit $(A_1, \ldots, A_N)$ un système complet fini d'événements.
Soit B un événement.
On a :
$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B\cap A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n),$$
avec la convention : $P(B|A_n)P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

— <u>avec un système complet dénombrable d'événements :</u>
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements.
Soit B un événement.
On a :
$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$
(les séries sont convergentes).

La formule des probabilités totales reste vraie en remplaçant le système complet d'événements par une suite d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Proposition 6 (formules de Bayes)

— Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
Alors
$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

— Soit $(A_1, \ldots, A_N)$ un système complet fini d'événements de probabilité non nulle.
Soit B un événement de probabilité non nulle.
Soit $k \in [\![1;N]\!]$.
On a :
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(A_n)P(B|A_n)}.$$

— Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements de probabilité non nulle.
Soit B un événement de probabilité non nulle.
On a :
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n)}.$$

4 Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si l'on a : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Si $P(B) \neq 0$, cela revient à : $P(A) = P(A|B)$.

Des événements $A_1, \ldots, A_N$ sont dits :
- *deux à deux indépendants* si pour tous $i, j \in [\![1;N]\!]$ tels que $i \neq j$ on a : $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
- *mutuellement indépendants* si pour tout $J \subseteq [\![1;N]\!]$, on a : $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$.

5 Variables aléatoires discrètes

5.1 Définitions

• Une *variable aléatoire (discrète)* X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow E$ dont l'image est finie ou dénombrable, et telle que l'image réciproque de toute partie de E est un événement :

$$\forall F \subseteq E, \ \ X^{-1}(F) \in \mathscr{A}.$$

Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire (discrète) *réelle*.
• On s'autorise à noter :
$(X \in F)$ ou $\{X \in F\}$ l'événement $X^{-1}(F)$
$P(X \in F)$ la probabilité de cet événement.
• On appelle *loi de X* l'application :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & [0;1] \\ F & \longmapsto & P(X \in F) \end{array}$$

• Le triplet $(E, \mathscr{P}(E), P_X)$ est un espace probabilisé.

Proposition 7 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$ d'image dénombrable $\operatorname{Im} X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(X = x_n) = p_n$.

5.2 Exemples

Lois à connaître : celles du tableau, et la loi uniforme sur un ensemble fini.
Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire.
Somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre.
Somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson.

5.3 Couples de variables aléatoires

Un couple de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète.
Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de X sachant $Y = y$:

$$\forall A \subseteq E,\ \ P(X \in A | Y = y) = \frac{P(X \in A \text{ et } Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Remarque 8 La connaissance de $\left\{\begin{array}{l}\text{la loi de } Y \\ \text{la loi de } X \text{ sachant } Y = y \text{ pour tout } y \in F \text{ tel que } P(Y=y) \neq 0\end{array}\right.$ détermine complètement la loi conjointe de Z.

5.4 Fonction génératrice (d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$)

La fonction génératrice d'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est la fonction :

$$\begin{array}{rcl} G_X : \ [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n \end{array}$$

Elle caractérise la loi de X.

6 Variables indépendantes

• Deux variables aléatoires (discrètes) $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ sont dites *indépendantes* si

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \ P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) P(Y = y).$$

On a alors, plus généralement :

$$\forall A \subseteq E,\ \forall B \subseteq F,\ \ P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

Proposition 9 Soient deux variables aléatoires indépendantes $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$. Soient $f : E \longrightarrow E'$ et $g : F \longrightarrow F'$ deux fonctions.
Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (notation abusive $f(X)$ pour $f \circ X$).

• Des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites
  — *deux à deux indépendantes* si : $\forall i \neq j,\ \ X_i$ et X_j indépendantes.
  — *mutuellement indépendantes* si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :
    (i) Pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$, $P(X_1 = x_n \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = x_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.
    (ii) Pour tout $(A_1, \ldots, A_n)$, $P(X_1 \in A_n \text{ et } \cdots \text{ et } X_n \in A_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k)$.

• Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
  — On dit que les v.a. X_n, où $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux indépendantes si $\forall i \neq j, X_i$ et X_j indép.
  — On dit que les v.a. X_n, où $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $J \subseteq I$, les variables aléatoires X_j où $j \in J$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 10 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Proposition 11 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes. On a :

$$G_{X_1 + \cdots + X_n} = G_{X_1} \cdots G_{X_n}.$$

7 Espérance, variance

7.1 Définitions

• Soit une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que X *admet une espérance* (ou *est d'espérance finie*) si la famille

$$\big(P(X=x)x\big)_{x\in X(\Omega)}$$

est sommable. On appelle alors *espérance de* X, et on note $\mathrm{E}(X)$, la somme de cette famille :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x.$$

• Une variable aléatoire réelle X admet une variance si X^2 admet une espérance. La variance de X est alors : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)]^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.
L'écart-type de X est le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.
• Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance.
La covariance de X et Y est :
$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)]) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.
Si X et Y sont de variance non nulle, leur *coefficient de corrélation* est le réel :
$\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

7.2 Propriétés

L'espérance est linéaire, positive, croissante.
Si a et b constantes : $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$ et $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.
Le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1.

Proposition 12 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
Si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.
Si X et Y admettent une variance, alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Proposition 13 (théorème du transfert pour une v.a. d'image finie)
Soit X une v.a. d'image finie $\mathrm{Im}X = \{x_1,\dots,x_N\}$ (où les x_n sont deux à deux distincts)
et $f : \mathrm{Im}X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Alors $f(X)$ admet comme espérance : $\mathrm{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(X{=}x_n)f(x_n)$.

Proposition 14 (théorème du transfert pour une v.a. d'image dénombrable)

Soit X une v.a. d'image dénombrable $\mathrm{Im}X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (où les x_n sont deux à deux distincts)
et $f : \mathrm{Im}X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Alors $f(X)$ admet une espérance ssi la série $\displaystyle\sum_n P(X{=}x_n)f(x_n)$ est absolument convergente,
et on a alors : $\mathrm{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X{=}x_n)f(x_n)$.

Proposition 15 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance.
On a : $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
En particulier, si $X_1 \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, alors :
$\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)$.

7.3 Lien avec les fonctions génératrices

Ici $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On a : $\forall t \in [-1;1]$, $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X)$.

Proposition 16 X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. On a alors $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.

Proposition 17 X admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors $\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

7.4 Inégalités

Proposition 18 (inégalité de Markov) Soit X une v.a. réelle admettant une espérance.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}.$$

Proposition 19 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une v.a. réelle admettant une variance.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}.$$

Proposition 20 (inégalité de Cauchy-Schwarz pour les probabilités) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance. On a :

$$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2).$$

8 Résultats asymptotiques

Théorème 21 (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson)
Soit un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit une suite de réels strictement positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$.
Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{e^{\lambda} k!}.$$

Théorème 22 (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi, admettant une variance.

On pose : $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \\ m = E(X_1) \\ \sigma = \sigma(X_1) \end{array}\right.$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$

Exercices de la banque CCP *à préparer* :

semaine 17 : 95, 97, 99, 100, 102, 103, 106
semaine 18 : 96, 98, 101, 104, 105, 107, 108, 112