Programme semaine 22

Équations différentielles

1 Rappels de première année

• Résolution des équations différentielles scalaires d'ordre 1 :

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Problèmes de raccord.

• Résolution des équations différentielles scalaires d'ordre 2 à coefficients constants et à second membre de la forme « polynôme × exponentielle ».

Principe de superposition.

Changements de variable (pour se ramener au cas d'une équation différentielle à coefficients constants).

2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition de $\exp : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$.

On a : $\exp(0_n) = I_n$ et $\forall A \in \mathrm{M}_n(K),\ \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$.

Exponentielle de la somme de deux matrices qui commutent (admis).

Continuité de exp.

Dérivée de $t \longmapsto \exp(tA)$.

Idem pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

3 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère l'équation différentielle $(E)\ X' = A(t)X + B(t)$
où $A : I \longrightarrow \mathrm{M}_n(K)$ et $B : I \longrightarrow K^n$ sont des applications continues.
Par définition, une solution de (E) (sur I) est une fonction $X \in \mathscr{C}^1(I, K^n)$ telle que

$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

• Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : existence et unicité d'une solution sur I à l'équation différentielle (E) avec condition initiale.

• Équation homogène $(E_0)\ X' = A(t)X$ associée à (E).
L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est un K-espace vectoriel de dimension n.

• Forme des solutions de (E) : somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0). L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est un K-espace affine de dimension n, de direction $\mathscr{S}_0$.

• Système fondamental de solutions de (E_0). Wronskien.

• Méthode de variation des constantes : permet de trouver une solution particulière de (E) à partir d'un système fondamental de solutions.

• Cas où la matrice A est constante : il suffit de diagonaliser ou trigonaliser A. On peut aussi résoudre l'équation à l'aide de l'exponentielle. Expression des solutions de (E_0) lorsque A est diagonalisable.

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$
et une équation différentielle scalaire $\quad (E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$
où a, b, c, d sont des fonctions continues de I dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Par définition, une solution de (E) (sur I) est une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, K)$ telle que

$$\forall t \in I,\ a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On suppose enfin que a ne s'annule jamais.

• Système différentiel d'ordre 1 équivalent à (E).

• Corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : existence et unicité d'une solution sur I à l'équation différentielle (E) avec conditions initiales.

• Équation homogène $\quad (E_0) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad$ associée à (E).
L'ensemble des solutions de (E_0) est un K-espace vectoriel de dimension 2.

• L'ensemble des solutions de (E) est un K-espace affine de dimension 2.

• Wronskien. Méthode de variation des constantes : permet de trouver une solution particulière de (E) à partir d'un système fondamental de solutions de (E_0).

• Méthode de variation de la constante : permet de trouver une solution particulière de (E) (ou même la solution générale de (E)) à partir d'une solution de (E_0) qui ne s'annule pas.

NB : bien revoir aussi la technique de recherche des solutions DSE d'une équation différentielle.

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 31, 32, 42, 74, 75