Programme semaine 23

Fonctions de plusieurs variables réelles

On considère des fonctions $f : U \longrightarrow F$, où U est un ouvert d'un EVN *E de dimension finie et F est un* EVN *de dimension finie.*

• Fonction différentiable en $a \in U$ = fonction admettant en a un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0.$$

L'application linéaire $df(a) \in \mathscr{L}(E,F)$ s'appelle la différentielle de f en a.
Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$, matrice jacobienne $J_a f$ de f en a.

• Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U = fonction différentiable sur U dont la différentielle $df : U \longrightarrow \mathscr{L}(E,F)$ est continue.

Théorème (admis) : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, elle admet en tout point $a \in U$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)$ et si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ soient continues sur U.

• Gradient Dans le cas où E est un espace euclidien et $F = \mathbb{R}$.

$$\forall h \in E, \quad df(a)\cdot h = \langle \nabla f(a) | h \rangle.$$

• Opérations sur les fonctions différentiables, sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
Notamment : composition de fonctions différentiables, règle de la chaîne.

• Caractérisation des fonctions (de classe $\mathscr{C}^1$) constantes sur un ouvert connexe par arcs : ce sont celles dont la différentielle est nulle en tout point.
Démonstration dans le cas d'un ouvert convexe.

• Étude des extremums d'une fonction Extremum global, extremum local

Si une fonction différentiable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point a de l'ouvert U, alors $\nabla f(a) = 0$ (on dit que a est un point critique de f).
Application : Si A est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur de A, alors f admet un maximum global et un minimum global.
Chacun d'eux est atteint soit en un point critique de f dans l'intérieur de A soit en un point de la frontière de A.

• Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Théorème de Schwarz : si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent au voisinage de a et sont continues en a, alors elles sont égales en a.

• Exemples d'EDP changement de variables :
changement de variables affine
passage en coordonnées polaires.

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 33, 52, 57, 58 et 55, 61 (les deux derniers sont deux exercices d'algèbre qui n'avaient pas été traités).