Chapitre 4. Automates.

1 Automates finis déterministes

1.1 Introduction et exemples

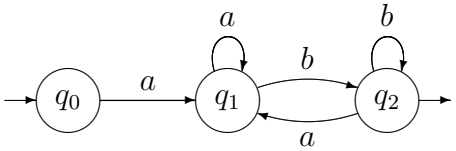
Nous avons déjà considéré dans le chapitre précédents des automates sans en donner une définition précise.

De manière informelle, un automate est une machine abstraite qui peut prendre un nombre fini d'*états*, qui reçoit en entrée un mot écrit sur un alphabet Σ et qui change d'état à la lecture des lettres de ce mot.

On sélectionne au préalable un état particulier appelé état *initial* et un certain nombre d'états qui sont qualifiés d'*acceptants* ou de *finaux*.
La lecture des mots se fait en partant de l'état initial. À la fin de la lecture du mot, si l'état dans lequel se trouve l'automate est un état acceptants, on dira que le mot est *accepté* ou *reconnu* et sinon, on dira qu'il est *rejeté*.

On représentera les automates sous la forme d'un graphe valué dont les sommets sont les différents états possibles de l'automate, et les arêtes représentent les transitions entre les états et sont étiquetées par des lettres de Σ.

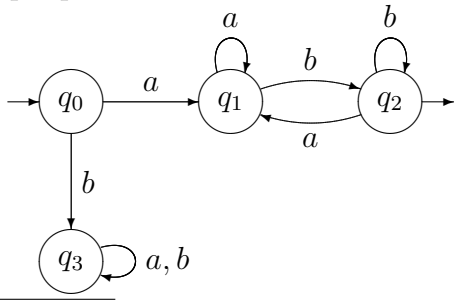
Considérons par exemple l'automate représenté ci-dessous, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



L'état initial (ici q_0) est désigné par une flèche entrante, les états acceptants (ici q_2) sont représentés par une flèche sortante. [1].

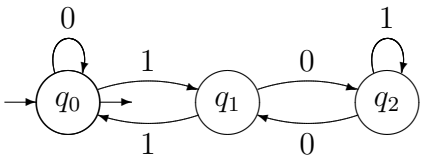
On se convaincra aisément que pour qu'un mot puisse être lu par cet automate, il faut qu'il commence par un a, et qu'alors la lecture du mot se termine à l'état q_1 si la dernière lettre du mot est un a et à l'état q_2 si la dernière lettre du mot est un b : on en déduit que les mots acceptés par cet automate sont les mots commençant par a et dont la dernière lettre est un b. On dit que le *langage reconnu* par cet automate est $a\Sigma^*b$.

Faute de transition partant de q_0 et étiquetée par b, un mot débutant par un b ne peut être lu par l'automate précédent. On dit que (q_0, b) est un *blocage* de l'automate. un automate sans blocage est dit *complet*. Il est toujours possible de rendre complet un automate présentant des blocages en rajoutant un état vers lequel aboutissent tous les blocages, état qu'on ne peut ensuite plus quitter. Cet état est appelé un *puits*. Le nouvel automate est alors complet, il permet de lire tous les mots de Σ^* et les mots reconnus sont les mêmes que pour l'automate initial. Sur notre exemple, l'automate obtenu est alors :



1. certains auteurs représentent les états acceptants en les entourant d'un double cercle

Exercice : On considère l'automate sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ représenté par :



Les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ seront identifiés aux entiers naturels via leur écriture en base 2.
a) Pour les entiers de $[\![0, 8]\!]$, indiquer l'état auquel on aboutit à la fin de la lecture du mot associé.
b) Déterminer, en justifiant, le langage reconnu par l'automate précédent.

1.2 Définitions

Définition 1. *Un automate fini déterministe (AFD ou DFA pour deterministic finite automaton) est un quintuplet $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ où :*

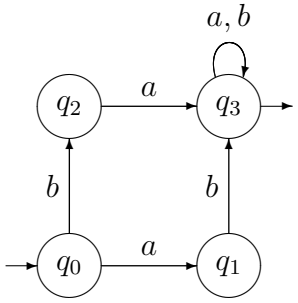
- *Σ est un alphabet (fini) ;*
- *Q est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les* états *de A ;*
- *q_0 est un élément de Q appelé état* initial *;*
- *F est une partie de Q dont les éléments sont appelés les états* acceptants *ou* finaux *;*
- *δ est une application d'une partie de $Q \times \Sigma$ dans Q, appelée* fonction de transition

Lorsque δ est définie sur $Q \times \Sigma$ tout entier, l'automate A est dit complet.
Si δ n'est pas définie en $(q, a) \in Q \times \Sigma$, on dit que (q, a) est un blocage *de A.*

Exemple : Considérons l'automate A_0 défini sur $\Sigma = \{a, b\}$ à 3 états nommés q_0, q_1, q_2 avec comme état initial q_0 et comme états acceptants $F = \{q_3\}$ et la fonction de transition définie par le tableau

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	$-$	q_3
q_2	q_3	$-$
q_3	q_3	q_3

. A_0 peut-être représenté par le graphe :



Notations : Si $\delta(q_i, a) = q_j$, on note encore $q_i.a = q_j$ et cette transition est représentée par $q_i \xrightarrow{a} q_j$.

Définition 2. *Si $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ est un AFD, on appelle* fonction de transition étendue aux mots *la fonction δ^* définie récursivement sur $Q \times \Sigma^*$ par :*

- *$\forall\, q \in Q$, $\delta^*(q, \varepsilon) = q$*
- *$\forall (q, m, a) \in Q \times \Sigma^* \times \Sigma$, $\delta^*(q, ma) = \delta(\delta^*(q, m), a)$*

Si $\delta^*(q, m) = q'$ on note encore $q.m = q'$.

Remarque : Si l'automate A présente des blocages, la fonction δ^* n'est définie que sur une partie de $Q \times \Sigma^*$. Plus précisément, si $m = a_1 a_2 \dots a_n$ avec les a_i dans Σ et $q \in Q$, $\delta^*(q, m)$ est défini s'il existe une succession de transitions $q \xrightarrow{a_1} q_{i_1} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_{i_n}$ débutant en q et on a alors $\delta^*(q, m) = q_{i_n}$. Autrement dit, $\delta^*(q, m)$ est l'unique état (s'il n'y a pas blocage) auquel on aboutit quand on lit le mot m à partir de l'état q.

Définition 3. ◇ *Soit un automate $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ fini déterministe et δ^* la fonction de transition étendue*

— *Un mot $m \in \Sigma^*$ est dit* reconnu *par A si $\delta^*(q_0, m) \in F$*

— *Le* langage reconnu *par A, noté $\mathscr{L}(A)$ est l'ensemble des mots reconnus par A.*

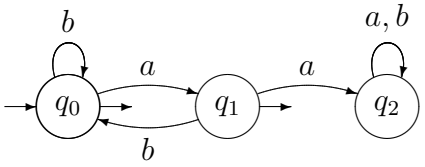
◇ *Deux automates sont dits équivalents s'ils reconnaissent le même langage.*

◇ *Un langage L sur l'alphabet Σ est dit reconnaissable s'il existe un AFD A sur Σ tel que $L = \mathscr{L}(A)$. On note $Rec(\Sigma)$ l'ensemble des langages reconnaissables sur Σ.*

Remarques : – D'après la remarque faite dans le paragraphe précédent, pour tout AFD A, il existe un automate fini déterministe complet équivalent à A obtenu par ajout d'un état « puits » vers lequel mènent tous les blocages et qu'on ne quitte plus ensuite.

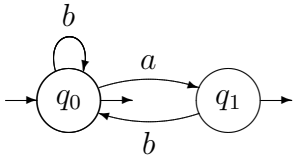
– Une succession de transitions $q \xrightarrow{a_1} q_{i_1} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_{i_n}$ est appelée un chemin dans l'automate A et le mot $m = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ est appelé son étiquette. Ce chemin est dit acceptant si son origine q est l'état initial q_0 de l'automate et que l'état d'arrivée q_{i_n} est un état acceptant. Le langage reconnu par un automate A est donc l'ensemble des étiquettes des chemins acceptants de cet automate.

Exercice : Déterminer le langage reconnu par l'automate :



1.3 Émondage

La fonction principale d'un automate est de reconnaître des mots en parcourant un par un leurs caractères. Dans le cas d'un automate complet, la complexité de l'algorithme qui en résulte est proportionnelle à la longueur du mot puisqu'il n'y a pas de blocage. Mais ceci peut être pénalisant : par exemple, dans l'automate ci-dessus, si on arrive dans l'état q_2, il est impossible de le quitter - q_2 étant un « puits » - et puisque q_2 n'est pas un état final, il n'est pas nécessaire de poursuivre la lecture du mot puisque ce dernier ne sera de toute façon pas reconnu. On peut donc supprimer l'état q_2 et toutes les transitions le mettant en jeu sans modifier le langage reconnu. On obtient ainsi l'automate équivalent (non complet) représenté ci-dessous :



Ceci nous conduit aux définitions suivantes :

Définition 4. *Un état q d'un AFD $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ est dit*

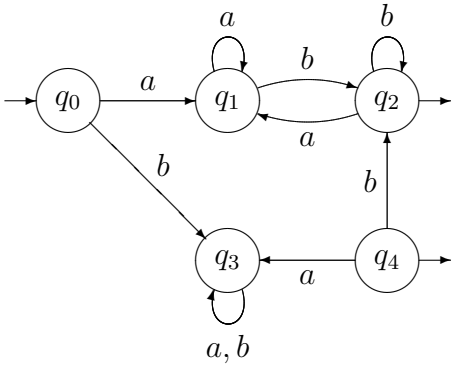
— accessible *s'il existe un chemin dans A menant de l'état initial à q autrement dit s'il existe $m \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(q_0, m) = q$;*

— co-accessible *s'il existe un chemin dans A menant de q à un étal acceptant c'est-à-dire s'il existe $m \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(q, m) \in F$;*

— utile *s'il est à la fois accessible et co-accessible.*

Remarque : On peut remarquer que la lecture d'un mot reconnu par A à partir de l'état initial q_0 ne passe que par des états utiles, donc on ne changera pas le langage reconnu en supprimant tous les états qui ne sont pas utiles ainsi que les transitions les impliquant. L'automate obtenu, qui ne possède plus que des états utiles est dit *émondé.*

Exercice : Pour l'automate représenté ci-dessous, préciser les états inutiles et déterminer l'automate émondé associé



2 Automates non déterministes

Nous allons généraliser la notion d'automate fini en leur permettant de posséder plusieurs états initiaux ou en autorisant deux transitions distinctes de même origine à avoir la même étiquette. Nous constaterons que ces automates non déterministes ne permettent pas de reconnaître plus de langages que les automates déterministes mais qu'ils ont l'avantage de posséder en général moins d'états qu'un automate déterministe équivalent.

Définition 5. *Un* automate fini non déterministe *(AFND ou NFA pour nondeterministic finite automaton) est défini par un quintuplet $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ où*

- *Σ est un alphabet (fini) ;*
- *Q est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les* états *de A ;*
- *$I \subset Q$ est l'ensemble des états* initiaux *;*
- *$F \subset Q$ est l'ensemble des états* acceptants *(ou* finaux*) ;*
- *δ est une application d'une partie de $Q \times \Sigma$ dans $\mathscr{P}(Q)$ appelée* fonction de transition.

Remarques : – On notera que pour ces automates, la notion de blocage n'a plus vraiment de sens puisqu'on peut avoir $\delta(q, a) = \emptyset$. On peut d'ailleurs convenir que δ est définie sur la totalité de $Q \times \Sigma$ en prolongeant δ en les couple (q, a) en lesquels elle n'est pas définie par $\delta(q, a) = \emptyset$.
– Une *transition* est un triplet (q, a, q') tel que $q' \in \delta(q, a)$; elle sera encore représentée par $q \xrightarrow{a} q'$. Un *chemin* est une succession finie de transitions consécutives $q_{i_0} \xrightarrow{a_1} q_{i_1} \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_{i_n}$: $a_1 a_2 \dots a_n$ est alors appelée l'*étiquette* de ce chemin.

Définition 6. *Soit A un automate fini non déterministe.*

- *Un mot de Σ^* est dit* reconnu *par A s'il est l'étiquette d'un chemin dans A menant d'un état initial à un état acceptant.*
- *Le langage des mots reconnus par A est noté $\mathscr{L}(A)$*

Remarques : – Pour qu'un mot soit reconnu il suffit donc qu'il existe un chemin d'étiquette ce mot menant d'un état initial à un état final de l'automate. Donc si on veut montrer qu'un mot n'est pas reconnu, il faut tester si tous les chemins partant d'un état initial et d'étiquette ce mot aboutissent à un état non final.
– Comme pour les AFD, on peut pour un AFND $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ définir la fonction de transition δ^* étendue aux mots comme la fonction $\delta^* : Q \times \Sigma^* \mapsto \mathscr{P}(Q)$ définie récursivement par :

- $\forall q \in Q,\ \delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\forall (q, m, a) \in Q \times \Sigma^* \times \Sigma,\ \delta^*(q, ma) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,m)} \delta(q', a)$.

On a alors $m \in \mathscr{L}(A) \iff \exists q_0 \in I,\ \delta^*(q_0, m) \cap F \neq \emptyset$.

2.1 Déterminisation

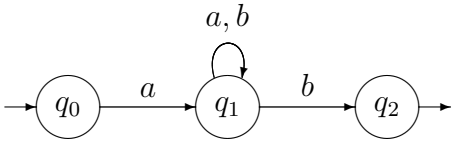
Nous allons montrer que pour tout automate non déterministe, il existe un automate déterministe équivalent, c'est-à-dire reconnaissant le même langage. La preuve que nous allons établir s'appelle *construction par sous-ensembles*.

Considérons un AFND $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ et posons :

$$A' = (\Sigma, \mathscr{P}(Q), I, F', \delta') \text{ où } F' = \{P \in \mathscr{P}(Q) | P \cap F \neq \emptyset\} \text{ et}$$

$$\forall (P, a) \in \mathscr{P}(Q) \times \Sigma,\ \delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$$

On peut remarquer que si A a n états, l'automate déterministe A' a 2^n états.
Pour comprendre cette construction mettons la en œuvre sur l'automate suivant - non déterministe - reconnaissant le langage des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ commençant par a et terminant par b :



A' possède alors $2^3 = 8$ états : $\emptyset$, $\{q_0\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_0, q_1\}$, $\{q_0, q_2\}$, $\{q_1, q_2\}$, $\{q_0, q_1, q_2\}$.
Son état initial est $I = \{q_0\}$ et ses états finaux : $\{q_2\}$, $\{q_0, q_2\}$, $\{q_1, q_2\}$, $\{q_0, q_1, q_2\}$.
Le tableau des transitions de A' est :

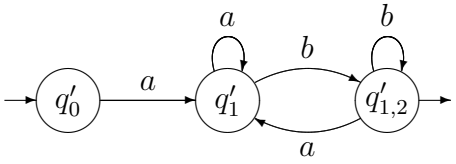
δ'	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	a	b
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$

Pour éviter d'avoir à représenter un automate trop volumineux, on ne représente que les états accessibles : pour ce faire, on commence par remplir le tableau des transitions avec l'état initial et on n'ajoute que les états qui apparaissent comme résultats des transitions précédentes. On ne représente pas non plus l'état $\emptyset$ qui n'est jamais co-accessible. En revanche, d'autres états non co-accessibles peuvent subsister. Dans notre exemple, cela conduit au tableau simplifié suivant :

δ'	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	–
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$

En posant $q'_0 = \{q_0\}$, $q'_1 = \{q_1\}$ et $q'_{1,2} = \{q_1, q_2\}$ l'automate déterminisé (et ici émondé) est représenté par :



Revenons à la situation générale et établissons le résultat annoncé plus haut :

Théorème Avec les notations précédentes, les automates A et A' reconnaissent le même langage.

Démonstration : On montre par récurrence sur $|u|$ que pour tout mot $u \in \Sigma^*$, il existe dans A un chemin étiqueté par u d'origine $q_0 \in I$ et menant à un état q si et seulement s'il existe dans A' un chemin étiqueté par u menant de I à un état P contenant q.

— Dans A tout chemin d'origine $q_0 \in I$ d'étiquette ε mène à q_0 ; dans A' tout chemin étiqueté par ε d'origine I mène à I qui contient q_0. Le résultat énoncé est donc vrai pour un mot de longueur 0.

— Soit $u \neq \varepsilon$ et supposons le résultat acquis pour tout mot de longueur strictement inférieure et posons $u = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Soit $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$ un chemin dans A d'étiquette u avec $q_0 \in I$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin $I \xrightarrow{a_1} P_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} P_{n-1}$ dans A' tel que $q_{n-1} \in P_{n-1}$. Mais alors $q_n \in \delta(q_{n-1}, a_n)$ donc $q_n \in \delta'(P_{n-1}, a_n)$. En posant $P_n = \delta'(P_{n-1}, a_n)$, on met en évidence un chemin dans $I \xrightarrow{a_1} P_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} P_n$ dans A' tel que $q_n \in P_n$.

Réciproquement soit $I \xrightarrow{a_1} P_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} P_n$ est un chemin dans A' d'étiquette u. Notons q_n un élément de P_n. Il existe alors $q_{n-1} \in P_{n-1}$ tel que $q_n \in \delta(q_{n-1}, a_n)$. Or par hypothèse de récurrence, il existe un chemin $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1}$ dans A, d'où l'existence d'un chemin $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A d'étiquette u.

On peut maintenant conclure : étant donné que $F' = \{P \in \mathscr{P}(Q) \,|\, P \cap F \neq \emptyset\}$, le résultat prouve qu'un mot est reconnu par A si et seulement si il est reconnu par A' ♯

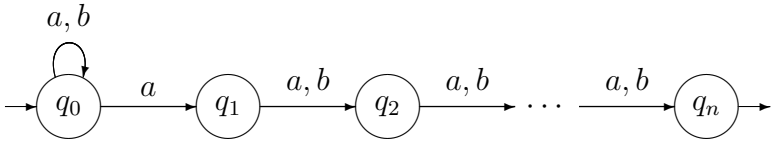
Remarques : Le résultat précédent montre que les automates finis non déterministes ne permettent pas de reconnaître plus de langages que les automates déterministes.

De plus, il est moins commode de vérifier qu'un mot n'est pas reconnu par un automate non déterministe puisqu'il est nécessaire de tester tous les chemins d'étiquette ce mot pour pouvoir conclure que le mot n'est pas reconnu, contrairement au cas d'un automate déterministe où on aura au plus un chemin étiqueté par un mot donné donc au plus un chemin à tester.

Toutefois, pour un langage donné, il est parfois plus simple de construire un automate non déterministe le reconnaissant. En outre, les automates non déterministes reconnaissant un langage donné ont souvent un nombre d'états plus petit que les automates déterministes le reconnaissant. Notons que, quand on déterminise un automate par l'algorithme des parties décrit ci-dessus, on peut passer de n états à 2^n états.

En pratique, si on dispose d'un automate non déterministe reconnaissant un langage donné, on le déterminisera, puis on émondera l'automate déterminisé, dans le but d'obtenir un automate déterministe reconnaissant le langage avec un nombre le plus réduit possible d'états. Il existe toutefois des situations où un langage reconnu par un AFND à n états ne peut être reconnu que par des AFD ayant un nombre d'états de l'ordre de 2^n comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Considérons le langage $\mathscr{L}$ des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ de longueur supérieure ou égale à n et dont le suffixe de longueur n commence par la lettre a autrement dit $\mathscr{L}$ est dénoté par l'expression rationnelle $(a+b)^* a (a+b)^{n-1}$. On trouve facilement un AFND à $n+1$ états reconnaissant ce langage :



Montrons que tout automate fini déterministe reconnaissant le langage $\mathscr{L}$ comporte au moins 2^n états.

Démonstration : Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD reconnaissant $\mathscr{L}$. Notons pour tout u mot de longueur n, $q(u)$ l'état auquel aboutit le chemin dans A d'origine q_0 et d'étiquette u. On définit ainsi une application $q : \{a, b\}^n \to Q$. Montrons que cette

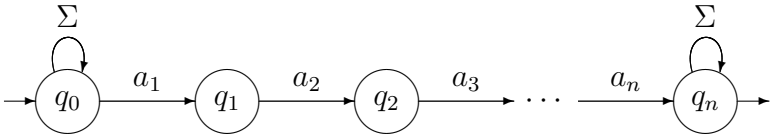
application q est injective ce qui prouvera que Q est de cardinal supérieur ou égal à 2^n.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux mots distincts u et v de longueur n tels que $q(u) = q(v)$. Notons s le plus grand suffixe commun à u et v de sorte que, sans perte de généralité, on peut supposer que $u = u'as$ et $v = v'bs$. Le mot s est de longueur au plus $n-1$ et peut être complété en st mot de longueur $n-1$. Dans ces conditions le mot $m = ut = u'ast$ est reconnu par A tandis que le mot $m' = vt = v'bst$ ne l'est pas. Pourtant comme $q(u) = q(v)$ les chemins d'origine q_0 et d'étiquettes ut et vt doivent mener au même état (ou être tous les deux bloquants) et puisque le premier est reconnu le second devrait l'être également. ♯

2.2 Application à la recherche d'un mot dans un texte : algorithme KMP

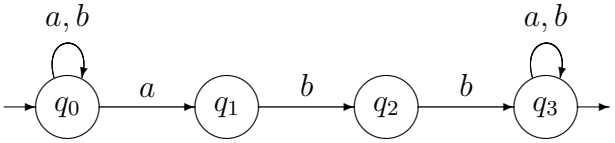
Pour illustrer l'utilité des automates pour résoudre certains problèmes, considérons celui de la recherche d'un mot dans un texte.

Étant donné un mot u, on souhaite considérer un automate caractérisant la présence de ce mot dans un texte, autrement dit un automate reconnaissant le langage $\Sigma^* u \Sigma^*$. Si $u = a_1 a_2 \dots a_n$, on construit facilement l'automate - non déterministe - ci dessous qui répond à la question.



Cependant, si on veut effectivement utiliser ce formalisme pour traiter un texte, on aura intérêt à avoir un automate déterministe équivalent. On applique donc l'algorithme de déterminisation à l'automate précédent.

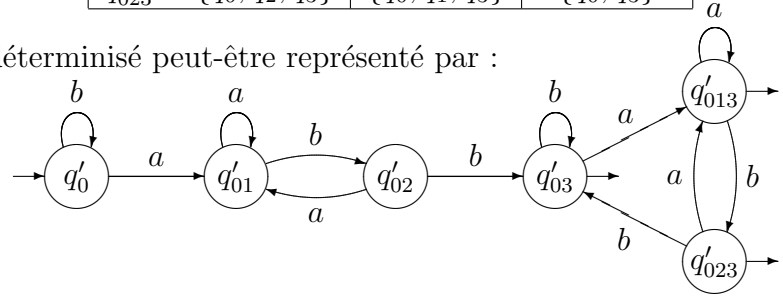
Exemple : Considérons le mot $u = abb$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate non déterministe reconnaissant $\Sigma^* u \Sigma^*$ est alors



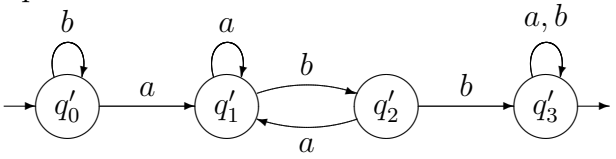
L'algorithme de déterminisation conduit au tableau suivant des transitions utiles :

δ'	a	b
$q'_0 = \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$q'_{01} = \{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$q'_{02} = \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$q'_{03} = \{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$q'_{013} = \{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$q'_{023} = \{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$

L'automate déterminisé peut-être représenté par :



On constate que l'automate obtenu n'est pas minimal, les trois états acceptants pouvant être regroupés en un seul sans modification du langage reconnu, d'où l'automate déterministe plus simple reconnaissant $\Sigma^* abb \Sigma^*$:



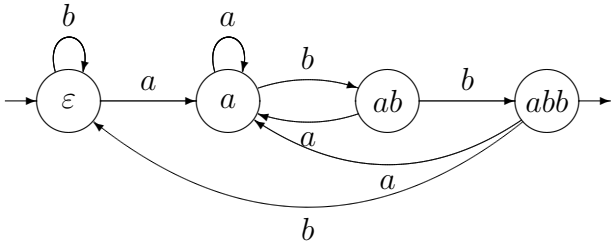
L'algorithme KMP (du nom de ses inventeurs Knuth, Morris et Pratt) permet d'obtenir mécaniquement un automate déterministe reconnaissant $\Sigma^* u \Sigma^*$ avec un nombre plus réduit d'états. Pour cela, on note $P(u)$ l'ensemble des préfixes du mot u et si v est un mot, on note $s(v)$ le plus grand suffixe de v appartenant à $P(u)$.
On considère ensuite l'automate déterministe $A = (\Sigma, P(u), \{\varepsilon\}, \{u\}, \delta)$ où la fonction de transition δ est définie par :

$$\forall p \in P(u),\ \forall\, x \in \Sigma,\ \delta(p, x) = s(px)$$

Exemple : Lorsque $u = abb$, on obtient alors le tableau des transitions

δ	a	b
ε	a	ε
a	a	ab
ab	a	abb
abb	a	ε

et l'automate



Pour un mot u quelconque, on a le résultat suivant :

Proposition : Le langage reconnu par l'automate A est $\Sigma^* u$

Démonstration : Notons δ^* la fonction de transition étendue aux mots. Montrons par récurrence la propriété :

$$H(n) : \forall\, p \in P(u),\ \forall\, v \in \Sigma^* \text{ de longueur } n,\ \delta^*(p, v) = s(pv)$$

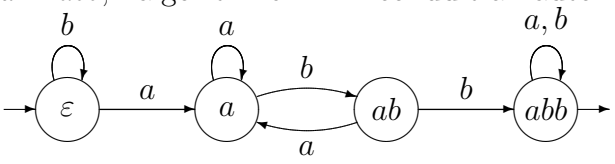
• $H(0)$ est vraie car si $p \in P(u)$, $\delta^*(p, \varepsilon) = p$ et $s(p\varepsilon) = s(p) = p$ puisque $p \in P(u)$
• soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Soit $p \in P(u)$ et v un mot de longueur $n+1$, $v = v'a$ avec $a \in \Sigma$. D'après $H(n-1)$, $\delta^*(p, v') = s(pv')$ donc $\delta^*(p, v) = \delta(s(pv'), a) = s(s(pv')a)$. Il s'agit donc de montrer que $s(s(pv')a) = s(pv)$. Posons $w' = s(pv')$ et $w = s(w'a)$.

w est suffixe de $w'a$ et w' est suffixe de pv' donc w est suffixe de $pv'a = pv$. De plus, $w \in P(u)$ donc w est suffixe de $s(pv)$ (plus long suffixe de pv qui soit dans $P(u)$)
Si $s(pv) = \varepsilon$ alors $w = \varepsilon$. Sinon, il existe $x \in \Sigma^*$ tel que $s(pv) = xa$ (car $v = v'a$). Alors $x \in P(u)$ et x suffixe de pv' donc x suffixe de $s(pv') = w'$ et xa suffixe de $w'a$. Puisque $xa \in P(u)$, alors xa est suffixe de $s(w'a) = w$. Dans les deux cas, on a montré que $s(pv)$ est suffixe de w donc finalement $w = s(pv)$

Ainsi, si $v \in \Sigma^*$, $v \in \mathscr{L}(A)$ équivaut à $\delta^*(\varepsilon, v) = u$ ou encore à $s(v) = u$ soit à $v \in \Sigma^* u$
♯

Corollaire : Pour obtenir un automate qui reconnait $\Sigma^* u \Sigma^*$, il suffit de considérer l'automate A et de transformer l'état u en un puits.

Exemple : Lorsque $u = abb$, l'algorithme KMP conduit à l'automate suivant :



On constate, qu'au changement de nom des états près, on retombe sur l'automate qu'on avait déterminé plus haut.

3 Automates finis et langages rationnels

Dans cette section, nous allons étudier le théorème fondamental de ce chapitre, qui affirme l'égalité entre l'ensemble des langages rationnels et l'ensemble des langages reconnaissables par un automate fini.

Théorème (Kleene)
Un langage L sur un alphabet Σ est rationnel si et seulement s'il existe un automate fini A tel que $L(A) = L$

Dans le paragraphe suivant, nous montrons que tout langage rationnel est reconnaissable par automate en donnant un algorithme construisant explicitement un automate (l'automate de Glushkov) reconnaissant le langage dénoté par une expression rationnelle. Nous admettrons la réciproque, moins utile en pratique, conformément au programme. Nous donnerons ensuite des propriétés des langages reconnaissables pour les étendre aux langages rationnels.

3.1 Algorithme de Berry-Sethi

• Cas d'un langage local

Nous allons montrer que tout langage local est reconnaissable par un automate fini. Donnons tout d'abord deux définitions concernant les automates.

Définition 7. *Un automate déterministe $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ est dit* local *si pour tout x de Σ, toutes les transitions d'étiquette x aboutissent au même état. Il est dit* standard *si aucune transition n'aboutit à l'état initial q_0.*

Proposition : Tout langage local est reconnaissable par un automate local standard

Démonstration : Soit $L = L_{I,B,F,b}$ un langage local sur l'alphabet Σ.

Premier cas : le mot vide ε n'appartient pas à L.
Posons alors $A = (\Sigma, \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon, F, \delta)$ l'automate dont la fonction de transition est définie par :

$$\forall\, x \in I, \delta(\varepsilon, x) = x \text{ et } \forall\, xy \in B,\ \delta(x, y) = y$$

Précisons que cet automate ne comporte aucune autre autre transition que celles que nous venons de décrire.
Alors $\varepsilon \notin L(A)$ et pour un mot non vide $m = a_1 \dots a_p$, $m \in L(A)$ si et seulement si $\varepsilon \xrightarrow{a_1} a_1$, $a_1 \xrightarrow{a_2} a_2$, …, $a_{p-1} \xrightarrow{a_p} a_p$ sont des transitions de A et que $a_p \in F$ c'est-à-dire si $a_1 \in I$, $\forall\, i \in [\![1, p-1]\!]$, $a_i a_{i+1} \in B$ et $a_p \in F$ c'est-à-dire si $m \in L_{I,B,F,b} = L$.
On a donc $L = L(A)$ et A est bien local et standard.

Deuxième cas : si $\varepsilon \in L$, il suffit de modifier l'automate précédent en ajoutant ε aux

états acceptants donc de prendre $A = (\Sigma, \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \varepsilon, F \cup \{\varepsilon\}, \delta)$ où δ est la même fonction de transition que précédemment ♯

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire : Tout langage dénoté par une expression rationnelle linéaire est reconnaissable par un automate local standard.

Démonstration : En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent que tout langage dénoté par une expression rationnelle linéaire (c'est-à-dire où toute lettre de Σ apparaît au plus une fois) est local ♯

Exemple : Représenter un automate local standard reconnaissant le langage dénoté par $(a + b)^*c$

• **Cas d'un langage rationnel : automate de** GLUSHKHOV

Nous considérons une expression rationnelle e et cherchons à construire un automate A reconnaissant le langage L dénoté par e.

▷ Montrons tout d'abord qu'on peut supposer que e ne contient ni le symbole $\emptyset$ ni le symbole ε.
En effet, si le langage L est vide, il est reconnu par tout automate ne possèdant pas d'état final ou possédant un état final inaccessible et sinon, nous avons montré au chapitre précédent qu'il existait une expression e' sans le symbole $\emptyset$ ni le symbole ε tel que e soit équivalente à ε, $\varepsilon + e'$ ou e'. Si $L = \{\varepsilon\}$, L est reconnu par l'automate à un seul état, à la fois initial et final et sans transitions. D'autre part, si on sait déterminer un automate $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ reconnaissant $L[e']$, alors l'automate $A' = (\Sigma, Q, q_0, F \cup \{q_0\}, \delta)$ reconnaît $L[e' + \varepsilon]$. On est donc ramené à construire un automate reconnaissant le langage dénoté par une expression rationnelle ne comportant pas les symboles $\emptyset$ et ε.

▷ Nous expliquons maintenant le principe de *linéarisation d'une expression rationnelle par marquage*
Soit e une expression rationnelle ne comportant pas les symboles $\emptyset$ et ε. Notons n le nombre de lettres (non nécessairement distinctes) apparaissant dans e et considérons n symboles distincts $a_1, a_2, \ldots a_n$. On considère l'expression rationnelle f obtenue en remplaçant dans e la k-ième lettre par ordre d'apparition quand on lit e de gauche à droite par a_k. L'expression f est alors linéaire et le langage noté par f est donc local : f est appelée l'expression linéarisée obtenue à partir de e par marquage.
Par exemple, si $e = (a^* + b)^*(ab + ba)^*$, on a $n = 6$ et $f = (a_1^* + a_2)^*(a_3a_4 + a_5a_6)^*$.
La fonction $\mu : \{a_1, \ldots, a_n\} \to \Sigma$ qui à a_i associe la lettre de e qu'elle remplace s'appelle *fonction de marquage* et elle permet de retrouver e à partir de f.
Sur notre exemple, on a $\mu(a_1) = \mu(a_3) = \mu(a_6) = a$ et $\mu(a_2) = \mu(a_4) = \mu(a_5) = b$.

Théorème Tout langage dénoté par une expression rationnelle sans symbole $\emptyset$ ni ε est reconnaissable par automate fini.

Démonstration : Notons n le nombre de caractères (non nécessairement distincts) apparaissant dans e, et f l'expression linéarisée obtenue à partir de e par marquage , $a_1, \ldots, a_n$ les symboles distincts utilisés et μ la fonction de marquage. Alors le langage dénoté par f est local donc il existe un automate local standard $A = (\{a_1, \ldots, a_n\}, Q, q_0, F, \delta)$ reconnaissant $L[f]$. On remplace dans A toutes les transitions

étiquetées par a_i par des transitions étiquetées par $\mu(a_i)$; autrement dit on considère l'automate $A' = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta')$ où pour tout $(q, i) \in Q \times [\![1, n]\!]$, $\delta(q, a_i) = \delta'(q, \mu(a_i))$. Alors A' est un automate standard (en général non déterministe et non local) qui reconnaît le langage dénoté par e ♯

Remarques : - Compte-tenu des remarques faites préalablement à la démonstration de ce théorème, nous avons donc montré la partie du théorème de KLEENE qui affirme que tout langage rationnel est reconnaissable par un automate fini. Rappelons que nous admettons la réciproque.
- L'algorithme qui consiste, pour une expression rationnelle, à
  - — linéariser cette expression
  - — calculer les ensembles I, B et F associés au langage local dénoté par l'expression linéarisée
  - — construire l'automate local reconnaissant le langage local en question
  - — supprimer les marques utilisées pour la linéarisation

s'appelle l'*algorithme de* BERRY-SETHI et l'automate obtenu s'appelle *automate de* GLUSHKOV de l'expression rationnelle considérée. Ce dernier est en général non déterministe et comporte $n + 1$ états où n est le nombre de lettres (non nécessairement distinctes) apparaissant dans e ; il peut être rendu déterministe par déterminisation et complet si on le souhaite.

Exemple : Appliquer l'algorithme de BERRY-SETHI au langage rationnel dénoté par l'expression rationnelle $e = (a + ab)^*ba$

3.2 Propriétés des langages reconnaissables

Dans ce paragraphe, on qualifiera de manière abrégée de « langage reconnaissable » tout langage L pour lequel il existe automate fini A tel que L soit le langage reconnu par l'automate A : notons que , quitte à le déterminiser ou le compléter, on pourra si nécessaire supposer que l'automate A est déterministe et complet. Citons deux propriétés de stabilité (on parle également de propriétés de clôture) des langages reconnaissables

Proposition : Le complémentaire d'un langage reconnaissable est reconnaissable

Démonstration : Soit L un langage sur l'alphabet fini Σ qui est reconnaissable : il existe donc un automate fini déterministe et complet $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ tel que $L = L(A)$. Considérons alors l'automate $A' = (\Sigma, Q, q_0, Q \setminus F, \delta)$. On remarque que A' est, comme A, complet et déterministe, donc tout mot de Σ^* est lu de manière unique par chacun de ces automates à partir de l'état initial q_0. De plus, ayant même état initial et même fonction de transition l'état $q_0.m$ auquel on aboutit en lisant le mot m à partir de q_0 est le même pour chacun de ces deux automates. Dans ces conditions, pour tout $m \in \Sigma^*$, on a l'équivalence :

$$m \in L(A') \iff q_0.m \in Q \setminus F \iff m \notin L \iff m \in \Sigma^* \setminus L$$

Le langage $L' = \Sigma^* \setminus L$ est donc le langage reconnu par l'automate A' ♯

Proposition : Une intersection finie de langages reconnaissables est reconnaisable

Démmonstration : Il suffit de le montrer pour l'intersection de deux langages. Soient donc L_1 et L_2 deux langages reconnaissables et $A_1 = (\Sigma, Q_1, q_{0,1}, F_1, \delta_1)$ et $A_2 = (\Sigma, Q_2, q_{0,2}, F_2, \delta_2)$ deux automates complets déterministes les reconnaissant. Considérons l'automate « produit » $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ défini par : $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_{0,1}, q_{0,2})$, $F = F_1 \times F_2$ et, $\forall q = (q_1, q_2) \in Q$ et $\forall a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \big(\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\big)$. Alors, en notant δ_1^*, δ_2^*, δ^* les fonctions de transitions étendues aux mots pour ces trois automates, on a $\forall q = (q_1, q_2) \in Q$ et $\forall m \in \Sigma^*$, $\delta^*(q, m) = \big(\delta_1^*(q_1, m), \delta_2^*(q_2, m)\big)$, d'où les équivalences, pour $m \in \Sigma^*$,

$$\begin{array}{rcl} m \in L(A) & \iff & \delta^*(q_0, m) \in F \\ & \iff & \big(\delta_1^*(q_{0,1}, m), \delta_2^*(q_{0,2}, m)\big) \in F \\ & \iff & \big(\delta_1^*(q_{0,1}, m) \in F_1 \text{ et } \delta_2^*(q_{0,2}, m) \in F_2\big) \\ & \iff & m \in L_1 \cap L_2 \end{array}$$

donc $L_1 \cap L_2$ est le langage reconnu par l'automate A ♯

Sachant que, d'après le théorème de Kleene, un langage L sur un alphabet Σ est reconnaissable si et seulement s'il est rationnel, on a le corollaire suivant :

Corollaire : L'ensemble des langages rationnels sur un alphabet Σ est stable par complémentation et par intersection finie

Remarques : - On notera que le corollaire précédent n'a rien d'évident avec la seule définition des langages rationnels
- On peut donc maintenant justifier de deux manières qu'un langage local est rationnel, ou bien en utilisant que pour $L = L_{I,B,F,b}$, $L \setminus \{\varepsilon\} = (I\Sigma^* \cup \Sigma^* F) \setminus (\Sigma^* N \Sigma^*)$ où $N = \Sigma^2 \setminus B$, ou encore que tout langage local est reconnaissable comme vu dans le paragraphe précédent.
- À l'inverse, les propriétés de clôture des langages rationnels résultant de la définition inductive des expressions rationnelles, permettent d'affirmer que les langages reconnaissables sont clos (ou stables) par concaténation, réunion finie ou étoile de Kleene

Exercice : Le langage miroir $\mathscr{M}(L)$ d'un langage L sur un alphabet Σ est défini par

$$\varepsilon \in \mathscr{M}(L) \iff \varepsilon \in L,$$

et, pour tout mot non vide $m = a_1 a_2 \dots a_p$,

$$m \in \mathscr{M}(L) \iff a_p a_{p-1} \dots a_1 \in L\,.$$

Montrer que si L est rationnel, son langage miroir l'est également.

Exercice : La racine carrée d'un langage L sur l'alphabet Σ est le langage défini par

$$\sqrt{L} = \{m \in \Sigma^* \,/\, m^2 \in L\}.$$

Montrer que si L est rationnel, $\sqrt{L}$ l'est également.

Exercice : Si K et L sont deux langages sur l'alphabet Σ, on définit le quotient gauche $K^{-1}L$ par

$$K^{-1}L = \{v \in \Sigma^* \,/\, \exists u \in K \text{ tel que } uv \in L\}.$$

Montrer que si L est un langage rationnel sur Σ et K un langage sur Σ^*, $K^{-1}L$ est un langage rationnel sur Σ.

3.3 Lemme de pompage

Nous disposons désormais de deux méthodes pour prouver qu'un langage est rationnel : soit en utilisant la définition, c'est-à-dire en exhibant une expression rationnelle dénotant ce langage, ou bien en utilisant le théorème de KLEENE c'est-à-dire en exhibant un automate qui le reconnaît.
A contrario, pour montrer qu'un langage n'est pas rationnel, on utilise souvent le principe des tiroirs ou un résultat appelé lemme de pompage ou lemme de l'étoile. À noter que ce lemme ne figure pas explicitement dans le programme, même s'il est très classique.

Principe des tiroirs
Si E et F sont deux ensemble finis tels que $\text{card}\,(E) > \text{card}\,(F)$, alors, pour toute application f de E dans F, il existe deux éléments distincts e et e' de E tels que $f(e) = f(e')$, autrement dit, f n'est pas injective

Exercice : En utilisant le principe des tiroirs, montrer que sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, le langage $L = \{m \in \Sigma^*,\ |m|_a = |m|_b\}$ n'est pas rationnel.

On peut systématiser l'utilisation du principe des tiroirs à travers le lemme de pompage évoqué plus haut

Lemme de pompage
Si L est un langage rationnel, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que tout mot $m \in L$ tel que $|m| \geqslant n$ admet une décomposition de la forme $m = xyz$ avec

- $y \neq \varepsilon$
- $|xy| \leqslant n$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ xy^k z \in L$

Démonstration : Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe reconnaissant L et $n = |Q|$ le nombre d'états de cet automate.
Si $m = m_1 m_2 \dots m_p$ est un mot de longueur $p \geqslant n$ appartenant à L, il existe un chemin d'origine q_0 et d'étiquette m dans cet automate :

$$q_0 \xrightarrow{m_1} q_1 \xrightarrow{m_2} q_2 \to \dots \xrightarrow{m_p} q_p \text{ avec } q_p \in F$$

les états $q_0, q_1, \dots q_n$ ne peuvent être deux à deux distincts : il existe donc $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $q_i = q_j$.
Posons $x = m_1 \dots m_i$, $y = m_{i+1} \dots m_j$ et $z = m_{j+1} \dots m_p$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, le chemin d'étiquette $xy^k z$ conduit encore à l'état acceptant q_p donc $xy^k z \in L$ ♯

Remarque : Il existe des langages non rationnels vérifiant la conclusion du lemme de pompage : ce lemme ne peut donc servir qu'à montrer qu'un langage n'est pas rationnel en exhibant grâce à ce lemme un mot qui n'appartient pas au langage et qui est obtenu par ce procédé d'itération.

Exercice : Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, montrer que le langage $L = \{a^i b^j,\ i < j\}$ n'est pas rationnel