Chapitre 2. GRAPHES.

Lycée Fabert - MP* - MP

Septembre 2020

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique
- des relations sociales

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique
- des relations sociales
- des interactions entre espèces animales

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique
- des relations sociales
- des interactions entre espèces animales

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique
- des relations sociales
- des interactions entre espèces animales

Ils constituent

- une branche entière des mathématiques

Un graphe permet de représenter les connexions d'un ensemble en indiquant les relations entre ses éléments.Ils peuvent représenter

- des réseaux (de communication, routier ...)
- un circuit électronique
- des relations sociales
- des interactions entre espèces animales

Ils constituent

- une branche entière des mathématiques
- un domaine incontournable de l'informatique

Dans ce chapitre, on cherchera à

Dans ce chapitre, on cherchera à

- comprendre la structure de graphe (orienté ou non)

Dans ce chapitre, on cherchera à

- comprendre la structure de graphe (orienté ou non)
- connaître les deux principales façons d'implémenter les graphes

Dans ce chapitre, on cherchera à

- comprendre la structure de graphe (orienté ou non)
- connaître les deux principales façons d'implémenter les graphes
- décrire les parcours de graphes

Dans ce chapitre, on cherchera à

- comprendre la structure de graphe (orienté ou non)
- connaître les deux principales façons d'implémenter les graphes
- décrire les parcours de graphes
- utiliser les graphes pour rechercher des plus courts chemins dans des graphes pondérés

Définition

- *Un **graphe non orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A est un ensemble de paires distinctes d'éléments de S c'est-à-dire de parties de S de cardinal 2.*

Définition

- *Un **graphe non orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A est un ensemble de paires distinctes d'éléments de S c'est-à-dire de parties de S de cardinal 2.*
- *Les éléments de S sont appelés **sommets** de G (en anglais vertices) et les éléments de A **arêtes** de G (en anglais edges).*

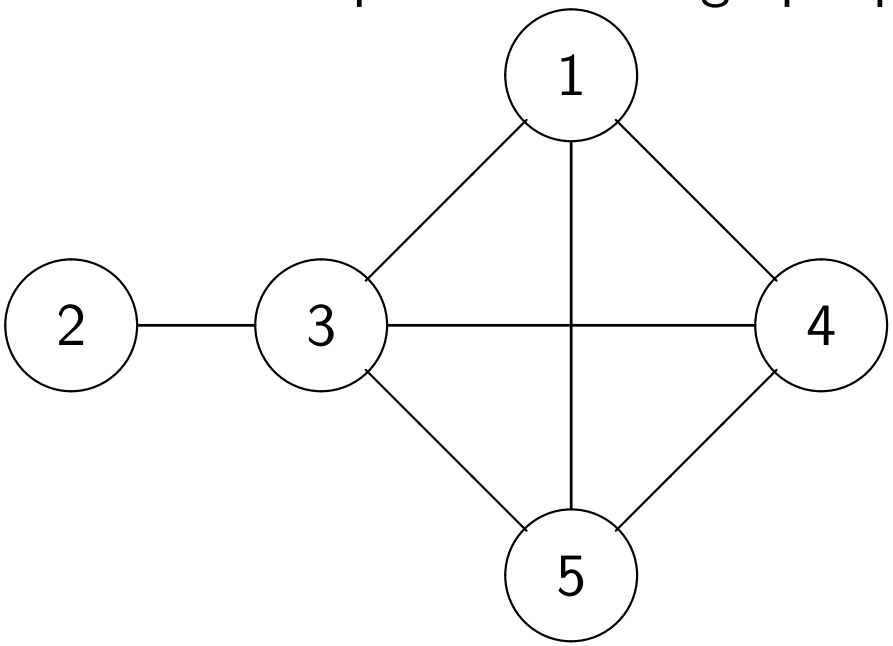
Définition

- *Un **graphe non orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A est un ensemble de paires distinctes d'éléments de S c'est-à-dire de parties de S de cardinal 2.*
- *Les éléments de S sont appelés **sommets** de G (en anglais vertices) et les éléments de A **arêtes** de G (en anglais edges).*
- *L'ordre du graphe G est le cardinal de S (noté $|S|$) c'est-à-dire le nombre de sommets du graphe.*

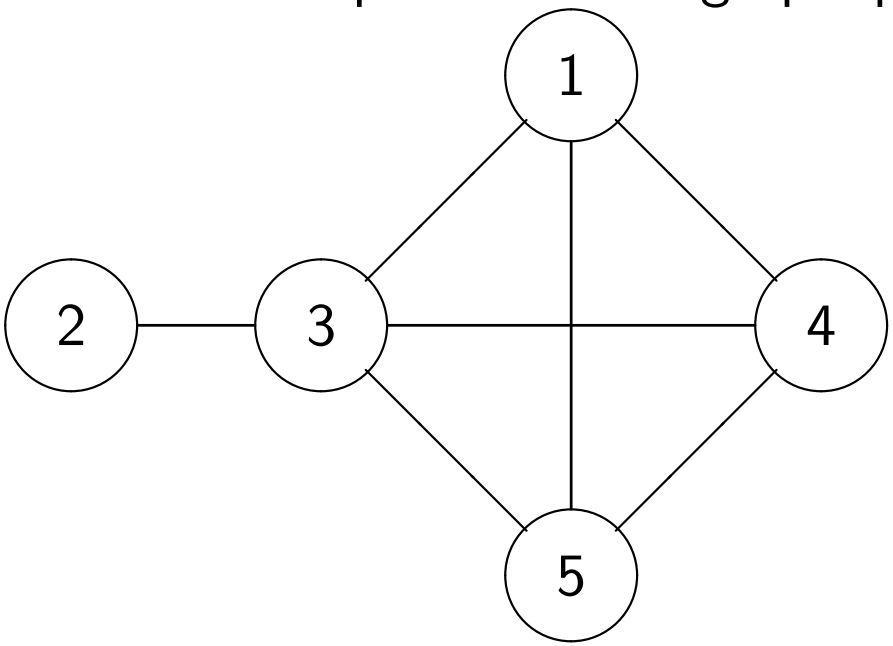
Exemple : On considère le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$

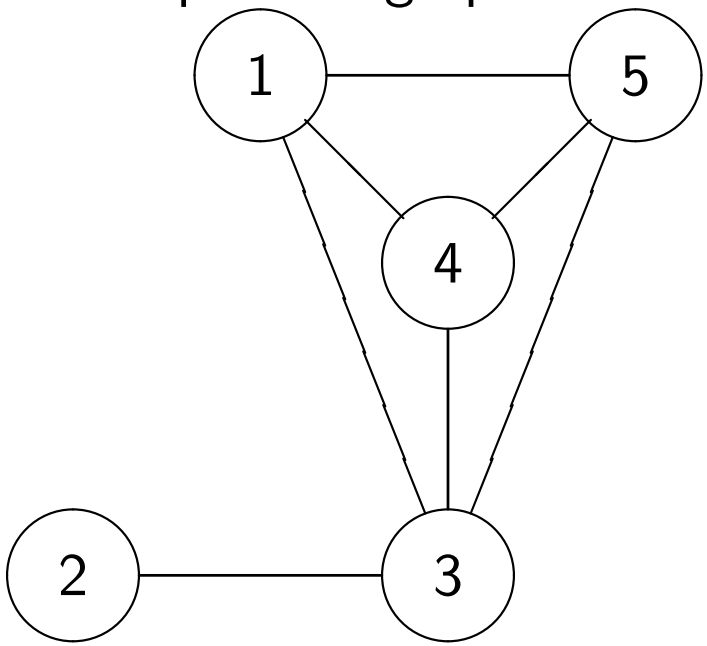
Exemple : On considère le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$
Voici deux représentations graphiques possibles pour ce graphe :

Exemple : On considère le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$
Voici deux représentations graphiques possibles pour ce graphe :



Exemple : On considère le graphe $G = (S, A)$ avec
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$A = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$
Voici deux représentations graphiques possibles pour ce graphe :



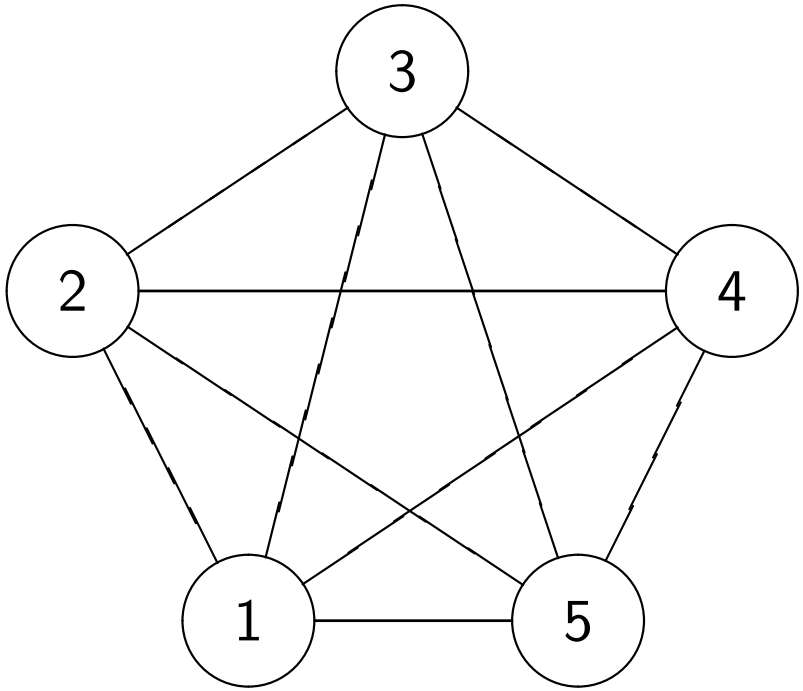


Exemple : Le graphe complet à n sommets (ou n-clique) est le graphe d'ordre n, noté K_n, tel que deux sommets quelconques de S sont toujours reliés par une arête.

Voici une représentation de K_5 :

Exemple : Le graphe complet à n sommets (ou n-clique) est le graphe d'ordre n, noté K_n, tel que deux sommets quelconques de S sont toujours reliés par une arête.

Voici une représentation de K_5 :



Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*
- *Si S' est une partie de S, on appelle **graphe induit** par G sur S' le sous-graphe $G' = (S', A \cap \mathscr{P}(S'))$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*
- *Si S' est une partie de S, on appelle **graphe induit** par G sur S' le sous-graphe $G' = (S', A \cap \mathscr{P}(S'))$.*

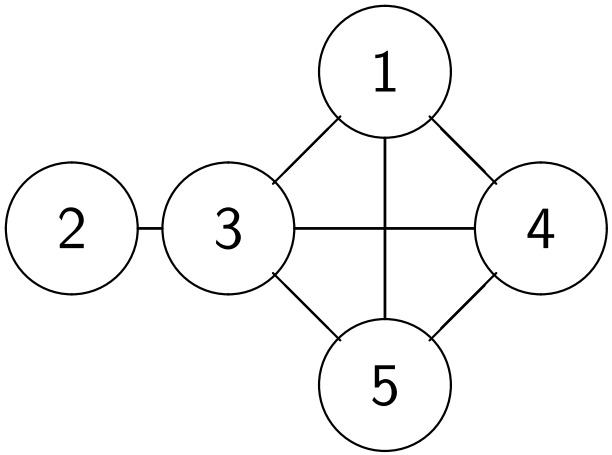
Exemple : Soit G, G', G'' les graphes non orientés représentés par :

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*
- *Si S' est une partie de S, on appelle **graphe induit** par G sur S' le sous-graphe $G' = (S', A \cap \mathscr{P}(S'))$.*

Exemple : Soit G, G', G'' les graphes non orientés représentés par :

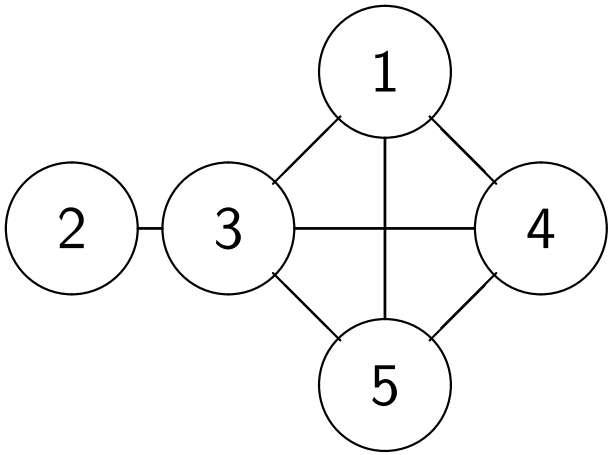


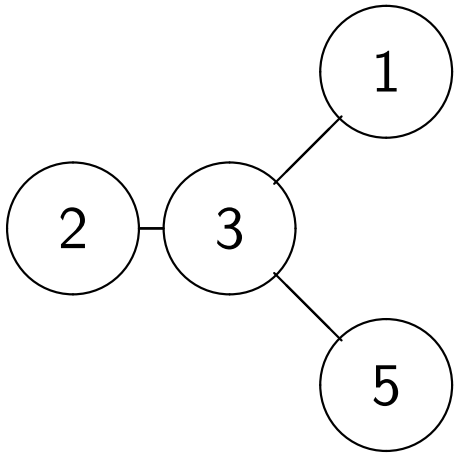
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*
- *Si S' est une partie de S, on appelle **graphe induit** par G sur S' le sous-graphe $G' = (S', A \cap \mathscr{P}(S'))$.*

Exemple : Soit G, G', G'' les graphes non orientés représentés par :



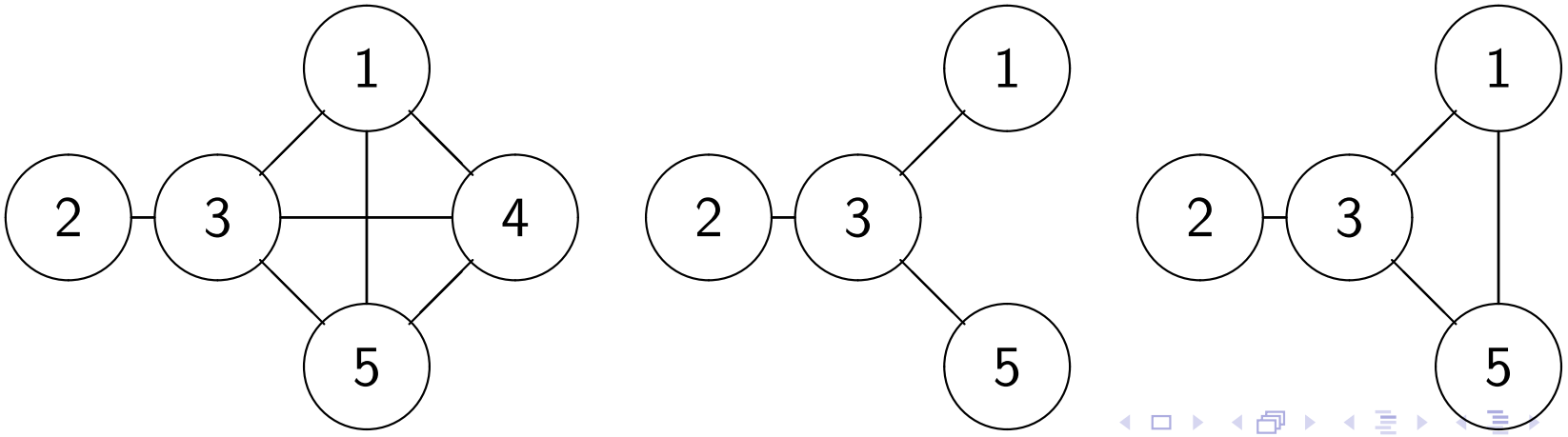


Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **sous-graphe** de G tout graphe non orienté $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A \cap \mathscr{P}(S')$.*
- *Si S' est une partie de S, on appelle **graphe induit** par G sur S' le sous-graphe $G' = (S', A \cap \mathscr{P}(S'))$.*

Exemple : Soit G, G', G'' les graphes non orientés représentés par :



Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*
- *Une arête $a \in A$ est dite **incidente à un sommet** $x \in S$ si x est une extrémité de a, c'est-à-dire si $x \in a$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*
- *Une arête $a \in A$ est dite **incidente à un sommet** $x \in S$ si x est une extrémité de a, c'est-à-dire si $x \in a$. Elle est dite **incidente à une autre arête** b de A si a et b ont un unique sommet en commun, c'est-à-dire si $|a \cap b| = 1$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*
- *Une arête $a \in A$ est dite **incidente à un sommet** $x \in S$ si x est une extrémité de a, c'est-à-dire si $x \in a$. Elle est dite **incidente à une autre arête** b de A si a et b ont un unique sommet en commun, c'est-à-dire si $|a \cap b| = 1$.*
- *Le degré d'un sommet x, noté $d(x)$, est le nombre de sommets adjacents à x.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*
- *Une arête $a \in A$ est dite **incidente à un sommet** $x \in S$ si x est une extrémité de a, c'est-à-dire si $x \in a$. Elle est dite **incidente à une autre arête** b de A si a et b ont un unique sommet en commun, c'est-à-dire si $|a \cap b| = 1$.*
- *Le degré d'un sommet x, noté $d(x)$, est le nombre de sommets adjacents à x. C'est également le nombre d'arêtes incidentes à x.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Deux sommets $x, y \in S$ sont dits **adjacents** si $\{x, y\} \in A$.*
- *Une arête $a \in A$ est dite **incidente à un sommet** $x \in S$ si x est une extrémité de a, c'est-à-dire si $x \in a$. Elle est dite **incidente à une autre arête** b de A si a et b ont un unique sommet en commun, c'est-à-dire si $|a \cap b| = 1$.*
- *Le degré d'un sommet x, noté $d(x)$, est le nombre de sommets adjacents à x. C'est également le nombre d'arêtes incidentes à x.*

Proposition

Dans un graphe $G = (S, A)$ non orienté, la somme des degrés des sommets est égal à deux fois le nombre d'arêtes soit :

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit une arête de G.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit une arête de G.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit une arête de G.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*
- *Le graphe G est dit **connexe** si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de S, il existe un chemin reliant x et y.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit une arête de G.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*
- *Le graphe G est dit **connexe** si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de S, il existe un chemin reliant x et y.*
- *Une **composante connexe** de G est un sous-graphe connexe maximal de G.*

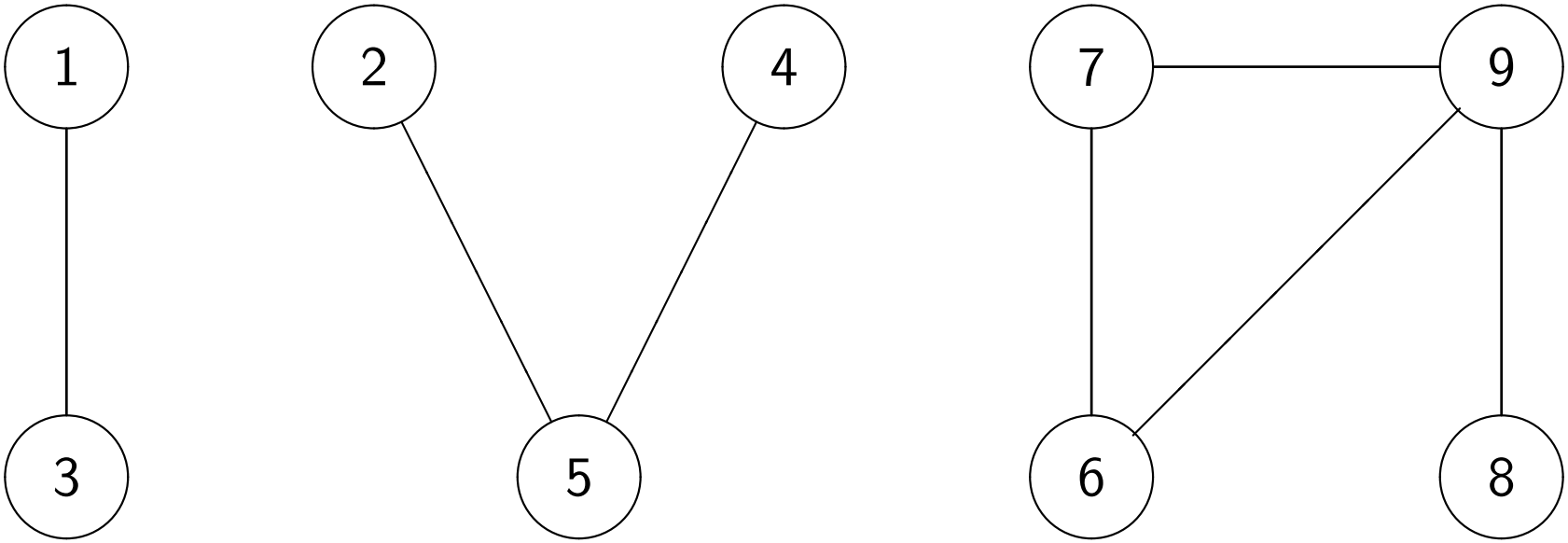
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *Un **chemin (ou chaine) de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit une arête de G.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*
- *Le graphe G est dit **connexe** si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de S, il existe un chemin reliant x et y.*
- *Une **composante connexe** de G est un sous-graphe connexe maximal de G.*

Exemple : Le graphe ci-dessous possède trois composantes connexes

Exemple : Le graphe ci-dessous possède trois composantes connexes



Quelques résultats.

Quelques résultats.

Proposition

Tout graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Quelques résultats.

Proposition

Tout graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$.

Quelques résultats.

Proposition

Tout graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit $G = (S, A)$ un graphe connexe d'ordre n.

Quelques résultats.

Proposition

Tout graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit $G = (S, A)$ un graphe connexe d'ordre n.

  • ou bien G possède un sommet x de degré 1. Alors le sous-graphe G' de G obtenu en supprimant ce sommet et l'unique arête du graphe incidente à x est encore connexe donc comporte au moins $n-2$ arêtes, donc G comporte au moins $1 + (n-2) = n-1$ arêtes.

Quelques résultats.

Proposition

Tout graphe non orienté connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit $G = (S, A)$ un graphe connexe d'ordre n.

  • ou bien G possède un sommet x de degré 1. Alors le sous-graphe G' de G obtenu en supprimant ce sommet et l'unique arête du graphe incidente à x est encore connexe donc comporte au moins $n-2$ arêtes, donc G comporte au moins $1 + (n-2) = n-1$ arêtes.

  • ou bien tous les sommets de G sont de degré supérieur ou

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **cycle** de G tout chemin $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ de longueur $k > 2$, reliant un sommet x_0 à lui-même, tel que les sommets $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- *On appelle **cycle** de G tout chemin $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ de longueur $k > 2$, reliant un sommet x_0 à lui-même, tel que les sommets $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Démonstration : Partons d'un sommet arbitraire x_1, et construisons une suite finie de sommets $x_1, x_2, \ldots x_k$ de la façon suivante :

- $x_i \notin \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$
- x_i voisin de x_{i-1}

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Démonstration : Partons d'un sommet arbitraire x_1, et construisons une suite finie de sommets $x_1, x_2, \ldots x_k$ de la façon suivante :

- $x_i \notin \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$
- x_i voisin de x_{i-1}

Comme G possède un nombre fini de sommets, cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Démonstration : Partons d'un sommet arbitraire x_1, et construisons une suite finie de sommets $x_1, x_2, \ldots x_k$ de la façon suivante :

- $x_i \notin \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$
- x_i voisin de x_{i-1}

Comme G possède un nombre fini de sommets, cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et, par conséquent,il existe $j \in [\![1, k-2]\!]$ tel que x_j pour est un autre voisin de x_k.

Proposition

Si dans un graphe non orienté G, tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Démonstration : Partons d'un sommet arbitraire x_1, et construisons une suite finie de sommets $x_1, x_2, \ldots x_k$ de la façon suivante :

- $x_i \notin \{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$
- x_i voisin de x_{i-1}

Comme G possède un nombre fini de sommets, cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et, par conséquent,il existe $j \in [\![1, k-2]\!]$ tel que x_j pour est un autre voisin de x_k. Dans ces conditions, $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k, x_j$ est un cycle de G ♯

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car un graphe d'ordre 1 n'a pas d'arêtes.

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car un graphe d'ordre 1 n'a pas d'arêtes.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit G un graphe acyclique d'ordre n. D'après la proposition précédente, G possède au moins un somme x de degré 0 ou 1.

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car un graphe d'ordre 1 n'a pas d'arêtes.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit G un graphe acyclique d'ordre n. D'après la proposition précédente, G possède au moins un somme x de degré 0 ou 1.Supprimons ce sommet ainsi, le cas échéant que l'éventuelle arête qui lui est incidente.

Proposition

Un graphe non orienté acyclique d'ordre n comporte au plus $n-1$ arêtes.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car un graphe d'ordre 1 n'a pas d'arêtes.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit G un graphe acyclique d'ordre n. D'après la proposition précédente, G possède au moins un somme x de degré 0 ou 1.Supprimons ce sommet ainsi, le cas échéant que l'éventuelle arête qui lui est incidente. Le graphe obtenu est d'ordre $n-1$, est encore acyclique donc possède au plus $n-2$ arêtes. Ainsi, G possède au plus $n-1$ arêtes ♯

Définition

*On appelle **arbre** tout graphe connexe acyclique.*

Définition

*On appelle **arbre** tout graphe connexe acyclique.*

Remarque : D'après les résultats précédents, un arbre d'ordre n possède exactement $n - 1$ arêtes.

Définition

*On appelle **arbre** tout graphe connexe acyclique.*

Remarque : D'après les résultats précédents, un arbre d'ordre n possède exactement $n-1$ arêtes.Plus précisément, pour un graphe d'ordre n, on peut montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- G est un arbre
- G est un graphe connexe à $n-1$ arêtes
- G est un graphe acyclique à $n-1$ arêtes

Définition

- *Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble fini de couples distincts d'éléments distincts de S (donc tel que $A \subset \{(x, y) \in S \times S / x \neq y\}$).*

Définition

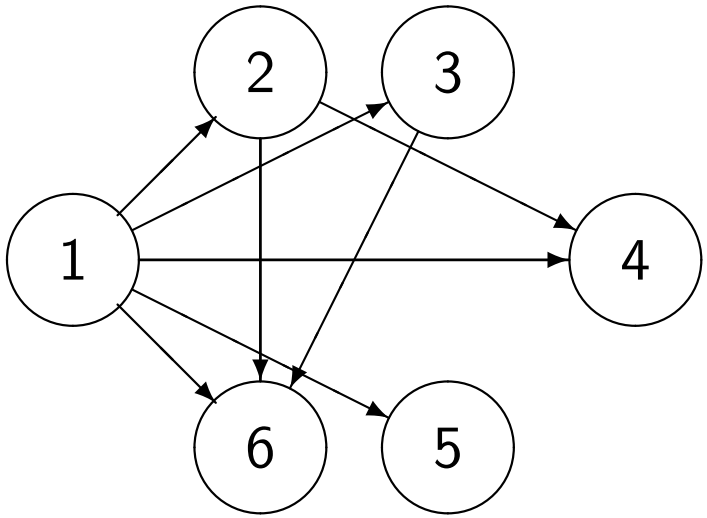
- *Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble fini de couples distincts d'éléments distincts de S (donc tel que $A \subset \{(x, y) \in S \times S / x \neq y\}$).*
- *Les éléments de S sont appelés **sommets** et ceux de A sont appelés **arcs** (ou arêtes s'il n'y a pas d'ambigüité sur le fait que G est orienté).*

Définition

- *Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble fini de couples distincts d'éléments distincts de S (donc tel que $A \subset \{(x, y) \in S \times S / x \neq y\}$).*
- *Les éléments de S sont appelés **sommets** et ceux de A sont appelés **arcs** (ou arêtes s'il n'y a pas d'ambigüité sur le fait que G est orienté).*
- *Si $a = (x, y) \in A$, on dit que a est l'arc d'**origine** x et de **destination** y.*

Exemple : On peut considérer sur $S = [\![1, n]\!]$ le graphe associé à la relation divise : si $x \neq y$, (x, y) est un arc du graphe si x divise y.

Exemple : On peut considérer sur $S = [\![1, n]\!]$ le graphe associé à la relation divise : si $x \neq y$, (x, y) est un arc du graphe si x divise y.Pour $n = 6$, il peut être représenté par :



Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $x \in S$.

- *Un sommet y de S est **voisin de** x (ou **adjacent à** x) si $(x, y) \in A$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $x \in S$.

- *Un sommet y de S est **voisin de** x (ou **adjacent à** x) si $(x, y) \in A$.*
- *On appelle **degré sortant** de x le nombre de voisins de x et **degré entrant** de x, le nombre de sommets dont il est voisin*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $x \in S$.

- *Un sommet y de S est **voisin de** x (ou **adjacent à** x) si $(x, y) \in A$.*
- *On appelle **degré sortant** de x le nombre de voisins de x et **degré entrant** de x, le nombre de sommets dont il est voisin*

Exemple : Dans le graphe précédent pour $n = 6$, on a le tableau des degrés entrants et sortants :

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $x \in S$.

- *Un sommet y de S est **voisin de** x (ou **adjacent à** x) si $(x, y) \in A$.*
- *On appelle **degré sortant** de x le nombre de voisins de x et **degré entrant** de x, le nombre de sommets dont il est voisin*

Exemple : Dans le graphe précédent pour $n = 6$, on a le tableau des degrés entrants et sortants :

x	1	2	3	4	5	6
$d_s(x)$	5	2	1	0	0	0
$d_e(x)$	0	1	1	2	1	3

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe

- *Un **chemin de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, (x_i, x_{i+1}) soit une arête de G.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe

- *Un **chemin de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, (x_i, x_{i+1}) soit une arête de G.*
- *Un **circuit** (ou cycle) de G est un chemin de longueur $k > 1$ de la forme $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ reliant un sommet à lui-même et tel que $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe

- *Un **chemin de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, (x_i, x_{i+1}) soit une arête de G.*
- *Un **circuit** (ou cycle) de G est un chemin de longueur $k > 1$ de la forme $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ reliant un sommet à lui-même et tel que $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe

- *Un **chemin de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, (x_i, x_{i+1}) soit une arête de G.*
- *Un **circuit** (ou cycle) de G est un chemin de longueur $k > 1$ de la forme $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ reliant un sommet à lui-même et tel que $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*
- *Le graphe G est dit **fortement connexe** si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de S, il existe un chemin reliant x et y **et** un chemin reliant y à x.*

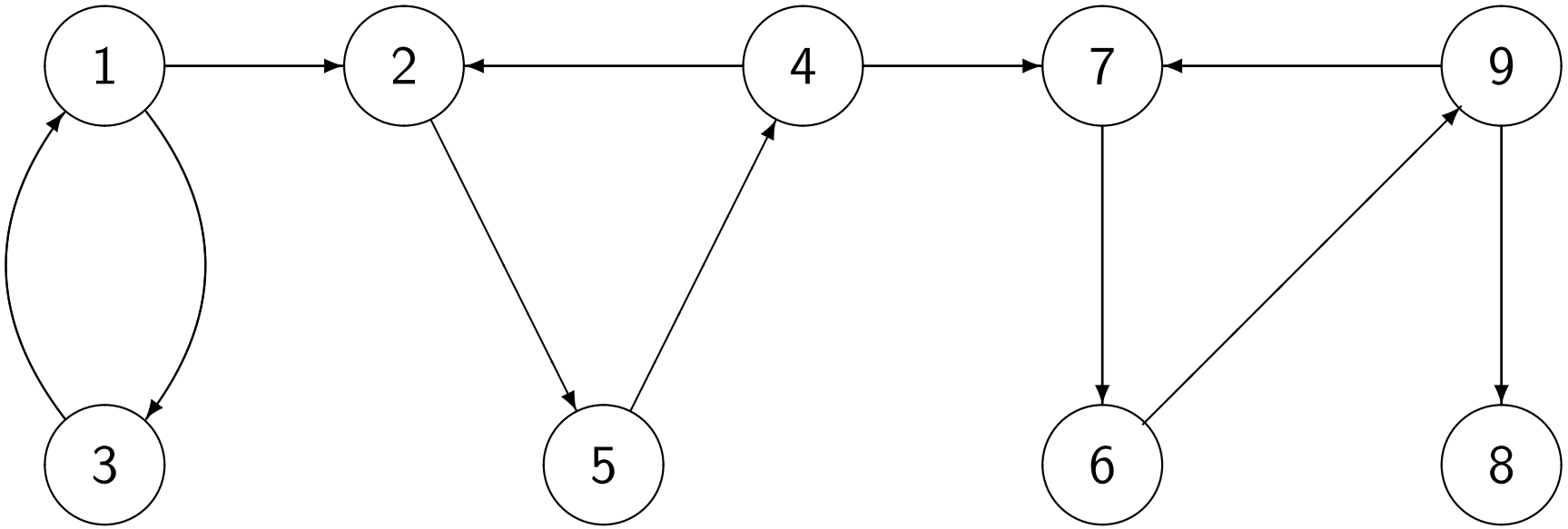
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe

- *Un **chemin de longueur** k reliant les sommets x et y est une suite finie $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de sommets telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, (x_i, x_{i+1}) soit une arête de G.*
- *Un **circuit** (ou cycle) de G est un chemin de longueur $k > 1$ de la forme $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0$ reliant un sommet à lui-même et tel que $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient deux à deux distincts.*
- *La **distance entre deux sommets** x et y est la plus petite longueur d'un chemin reliant x à y.*
- *Le graphe G est dit **fortement connexe** si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de S, il existe un chemin reliant x et y **et** un chemin reliant y à x.*
- *Une **composante fortement connexe** de G est un*

Exemple : dénombrer et représenter les composantes fortement connexes du graphe ci-dessous :

Exemple : dénombrer et représenter les composantes fortement connexes du graphe ci-dessous :



Arbre enraciné

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Proposition

Si x et y sont deux sommets distincts d'un arbre G, il existe un unique chemin dans G reliant x et y.

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Proposition

Si x et y sont deux sommets distincts d'un arbre G, il existe un unique chemin dans G reliant x et y.

Démonstration : G est connexe d'où l'existence d'un tel chemin.

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Proposition

Si x et y sont deux sommets distincts d'un arbre G, il existe un unique chemin dans G reliant x et y.

Démonstration : G est connexe d'où l'existence d'un tel chemin. S'il en existait un deuxième, on pourrait former un cycle dans G en empruntant le premier chemin entre x et y, puis le second entre y et x. Le caractère acyclique de G serait alors contredit. ♯

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Proposition

Si x et y sont deux sommets distincts d'un arbre G, il existe un unique chemin dans G reliant x et y.

Démonstration : G est connexe d'où l'existence d'un tel chemin. S'il en existait un deuxième, on pourrait former un cycle dans G en empruntant le premier chemin entre x et y, puis le second entre y et x. Le caractère acyclique de G serait alors contredit. ♯
Une conséquence de ce résultat est qu'il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes

Arbre enraciné

Revenons à la définition générale des arbres que nous avons donnée dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire un graphe non orienté, connexe et acyclique et montrons qu'on peut l'enraciner et l'orienter pour obtenir un arbre au sens usuel.

Proposition

Si x et y sont deux sommets distincts d'un arbre G, il existe un unique chemin dans G reliant x et y.

Démonstration : G est connexe d'où l'existence d'un tel chemin. S'il en existait un deuxième, on pourrait former un cycle dans G en empruntant le premier chemin entre x et y, puis le second entre y et x. Le caractère acyclique de G serait alors contredit. ♯
Une conséquence de ce résultat est qu'il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, il y a un seul sommet et aucune arête à orienter.

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, il y a un seul sommet et aucune arête à orienter.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n - 1$. Soit G un arbre d'ordre n et r l'un de ses sommets. On sait que la somme des degrés de G vaut $2n - 2$ donc il y a au moins deux sommets de degré 1

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, il y a un seul sommet et aucune arête à orienter.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n - 1$. Soit G un arbre d'ordre n et r l'un de ses sommets. On sait que la somme des degrés de G vaut $2n - 2$ donc il y a au moins deux sommets de degré 1 donc au moins un sommet x différent de r et de degré 1.

Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, il y a un seul sommet et aucune arête à orienter.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$. Soit G un arbre d'ordre n et r l'un de ses sommets. On sait que la somme des degrés de G vaut $2n-2$ donc il y a au moins deux sommets de degré 1 donc au moins un sommet x différent de r et de degré 1.Si on supprime x de G ainsi que l'arête qui le relie à l'arbre, on obtient un arbre d'ordre $n-1$ auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour l'enraciner en r.

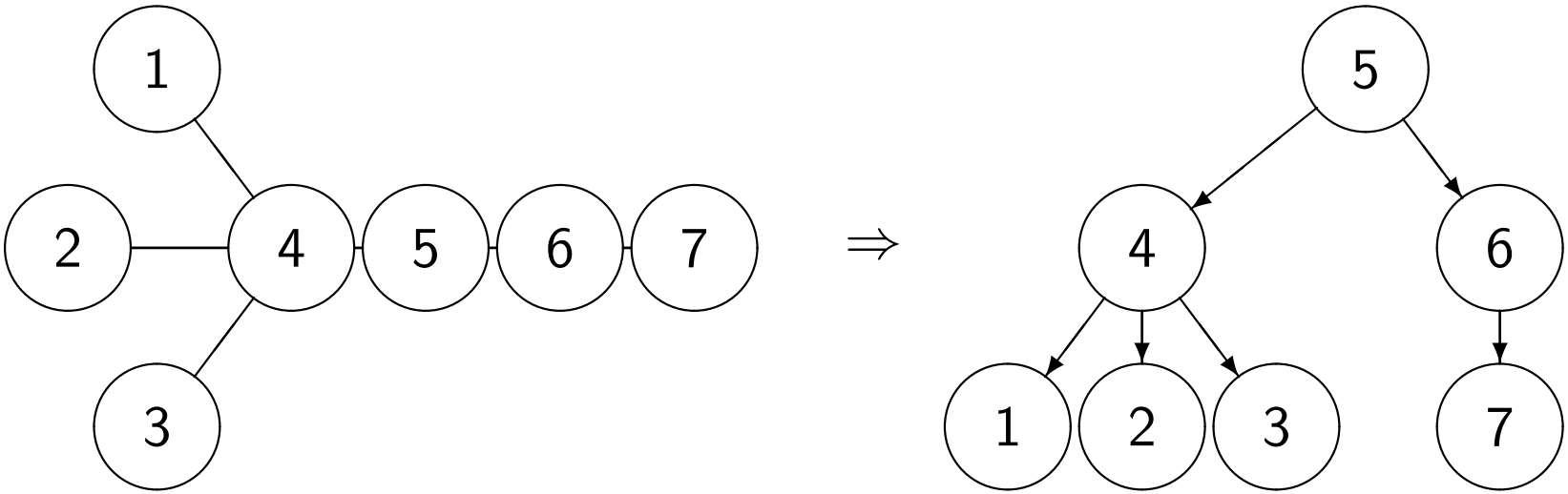
Proposition

Il est possible de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre G puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets.

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, il y a un seul sommet et aucune arête à orienter.
- Soit $n > 1$ tel que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$. Soit G un arbre d'ordre n et r l'un de ses sommets. On sait que la somme des degrés de G vaut $2n-2$ donc il y a au moins deux sommets de degré 1 donc au moins un sommet x différent de r et de degré 1.Si on supprime x de G ainsi que l'arête qui le relie à l'arbre, on obtient un arbre d'ordre $n-1$ auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour l'enraciner en r.Il ne reste plus qu'a orienter l'arête supprimée en direction de x pour enraciner G en r.

Exemple : Ci-dessous on montre un enracinement de l'arbre à gauche en $r = 5$



Il existe principalement deux méthodes pour représenter un graphe en machine :

Il existe principalement deux méthodes pour représenter un graphe en machine :

- à l'aide de listes d'adjacence (à chaque sommet on associe la liste de ses voisins) ;

Il existe principalement deux méthodes pour représenter un graphe en machine :

- à l'aide de listes d'adjacence (à chaque sommet on associe la liste de ses voisins) ;
- à l'aide d'une matrice d'adjacence (la valeur du coefficient d'indices (i, j) indiquera l'existence ou non d'une liaison entre les sommets i et j).

• **Première version** Dans le cas où on travaille sur des graphes dont le nombre de sommets n'a pas vocation à être modifié, on peut utiliser le type suivant pour représenter des graphes :

```
type graphe = int list array
```

• **Première version** Dans le cas où on travaille sur des graphes dont le nombre de sommets n'a pas vocation à être modifié, on peut utiliser le type suivant pour représenter des graphes :

```
type graphe = int list array
```

Si `t` est un graphe de ce type, ses sommets sont les entiers de 0 à `Array.length g -1` et `g.(i)` est la liste des voisins du sommet `i`.

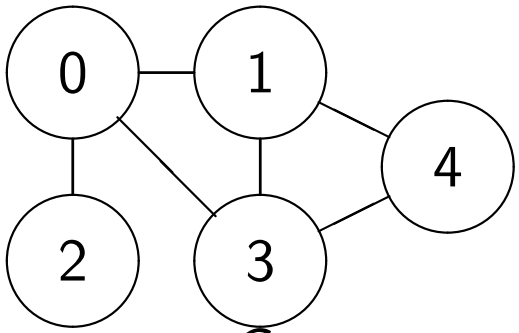
• **Première version** Dans le cas où on travaille sur des graphes dont le nombre de sommets n'a pas vocation à être modifié, on peut utiliser le type suivant pour représenter des graphes :

```
type graphe = int list array
```

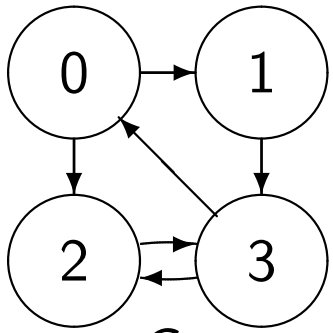
Si `t` est un graphe de ce type, ses sommets sont les entiers de 0 à `Array.length g -1` et `g.(i)` est la liste des voisins du sommet `i`. On peut, si on le souhaite, et c'est ce que nous ferons ici, s'arranger pour que les listes de voisins soient toujours triées en ordre croissant.

Exemple :

Exemple :



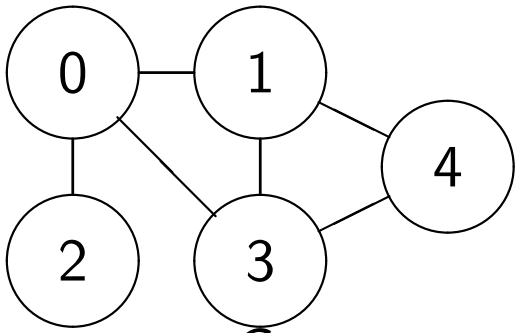
G_1



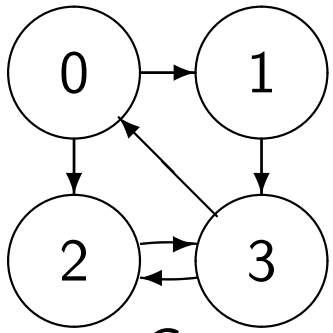
G_2

```
let g1 = [| [1;2;3] ; [0;3;4] ; [0] ; [0;1;4] ; [1;3]
|];;
```

Exemple :



G_1



G_2

```
let g1 = [| [1;2;3] ; [0;3;4] ; [0] ; [0;1;4] ; [1;3]
|];;
let g2 = [| [1;2] ; [3] ; [3] ; [0;2] |];;
```

```
let voisins g i = g.(i);;
```

```
let voisins g i = g.(i);;

let rec insere x l = match l with
| [] -> [x]
| t::_ when x < t -> x::l
| t::_ when x = t -> l
| t::q -> t::(insere x q);;
```

```
let voisins g i = g.(i);;

let rec insere x l = match l with
| [] -> [x]
| t::_ when x < t -> x::l
| t::_ when x = t -> l
| t::q -> t::(insere x q);;

let ajoute_arete g i j =
g.(i) <- insere j g.(i);
(* g.(j) <- insere i g.(j) *);;
```

```
let rec supprime x l = match l with
| [] -> []
| t::_ when x < t -> l
| t::q when x = t -> q
| t::q -> t::(supprime x q);;
```

```
let rec supprime x l = match l with
| [] -> []
| t::_ when x < t -> l
| t::q when x = t -> q
| t::q -> t::(supprime x q);;

let supprime_arete g i j =
supprime j g.(i);
(* supprime i g.(j) *);;
```

Fonction convertissant un graphe orienté en un graphe non orienté.

Fonction convertissant un graphe orienté en un graphe non orienté.

```
let desoriente g =
let rec aux i li = match li with
  | [] -> ()
  | j::q -> g.(j) <- insere i g.(j); aux i q in
for i = 0 to Array.length g - 1 do aux i g.(i);;
```

Fonction convertissant un graphe orienté en un graphe non orienté.

```
let desoriente g =
let rec aux i li = match li with
  | [] -> ()
  | j::q -> g.(j) <- insere i g.(j); aux i q in
for i = 0 to Array.length g - 1 do aux i g.(i);;
```

Cette implémentation précédente présente l'inconvénient

Fonction convertissant un graphe orienté en un graphe non orienté.

```
let desoriente g =
let rec aux i li = match li with
  | [] -> ()
  | j::q -> g.(j) <- insere i g.(j); aux i q in
for i = 0 to Array.length g - 1 do aux i g.(i);;
```

Cette implémentation précédente présente l'inconvénient de ne pas pouvoir ajouter de sommet aux graphes, la taille d'un tableau n'étant pas modifiable.

- **Seconde version**

```
type 'a sommet = id : 'a ; voisins : 'a list;;
```

- **Seconde version**

```
type 'a sommet = id : 'a ; voisins : 'a list;;
type 'a graph = 'a sommet list;;
```

- **Seconde version**

```
type 'a sommet = id : 'a ; voisins : 'a list;;
type 'a graph = 'a sommet list;;
```

Avantage ?

- **Seconde version**

```
type 'a sommet = id : 'a ; voisins : 'a list;;
type 'a graph = 'a sommet list;;
```

Avantage ? Inconvénient ?

- **Seconde version**

```
type 'a sommet = id : 'a ; voisins : 'a list;;
type 'a graph = 'a sommet list;;
```

Avantage ? Inconvénient ?

Exemple : Avec cette représentation, le graphe G_2 de l'exemple précédent serait défini par :

```
let g2 = [
  id = 0 ; voisins = [1;2];
  id = 1 ; voisins = [3];
  id = 2 ; voisins = [3];
  id = 3 ; voisins = [0;2] ];;
```

Ajout et la suppression d'un sommet

Ajout et la suppression d'un sommet

```
let rec ajoute_sommet g a = match g with
  | [] -> [ id = a ; voisins = []  ]
  | s::q when s.id = a -> g
  | s::q -> s::(ajoute_sommet q a);;
```

Ajout et la suppression d'un sommet

```
let rec ajoute_sommet g a = match g with
  | [] -> [ id = a ; voisins = [] ]
  | s::q when s.id = a -> g
  | s::q -> s::(ajoute_sommet q a);;

let rec supprime_sommet g a =
let rec suppr l = match l with
  | [] -> []
  | t::q when t = a -> q
  | t::q -> t::(suppr q)
```

Ajout et la suppression d'un sommet

```
let rec ajoute_sommet g a = match g with
  | [] -> [ id = a ; voisins = [] ]
  | s::q when s.id = a -> g
  | s::q -> s::(ajoute_sommet q a);;

let rec supprime_sommet g a =
let rec suppr l = match l with
  | [] -> []
  | t::q when t = a -> q
  | t::q -> t::(suppr q)
in match g with
  | [] ->[]
  | s::q when s.id = a -> supprime_sommet q a
  | s::q -> let ns = id = s.id ; voisins = suppr
s.voisins
```

Si on veut accéder aux différentes arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ en temps constant, il faut procéder autrement

Si on veut accéder aux différentes arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ en temps constant, il faut procéder autrement

```
type graphe = int array array;;
```

Si on veut accéder aux différentes arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ en temps constant, il faut procéder autrement

```
type graphe = int array array;;
```

- avantages : l'ajout ou la suppression d'une arête a un coût constant

Si on veut accéder aux différentes arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ en temps constant, il faut procéder autrement

```
type graphe = int array array;;
```

- avantages : l'ajout ou la suppression d'une arête a un coût constant
- inconvénient : si $n = |S|$ et $p = |A|$, le coût spatial de la représentation par matrice d'adjacence est un $\Theta(n^2)$ contre un $\Theta(n + p)$ pour une représentation par listes d'adjacence.

Si on veut accéder aux différentes arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ en temps constant, il faut procéder autrement

```
type graphe = int array array;;
```

- avantages : l'ajout ou la suppression d'une arête a un coût constant
- inconvénient : si $n = |S|$ et $p = |A|$, le coût spatial de la représentation par matrice d'adjacence est un $\Theta(n^2)$ contre un $\Theta(n + p)$ pour une représentation par listes d'adjacence.

Exemple : Le graphe G_2 donné en exemple en 2.1. est représenté par :

```
let g2= [|
  [|0;1;1;0|];
  [|0;0;0;1|];
  [|0;0;0;1|];
  [|1;0;1;0|] |];;
```

Les fonctions vues précédemment deviennent (on donne la version pour les graphes orientés) :

Les fonctions vues précédemment deviennent (on donne la version pour les graphes orientés) :

```
let voisins g i =
  let vi = ref [] in
  for j = Array.length g - 1 downto 0 do
  if g.(i).(j)=1 then vi := j :: !vi
  done;
  !vi;;
```

Les fonctions vues précédemment deviennent (on donne la version pour les graphes orientés) :

```
let voisins g i =
  let vi = ref [] in
  for j = Array.length g - 1 downto 0 do
  if g.(i).(j)=1 then vi := j :: !vi
  done;
  !vi;;

let ajoute_arete g i j = g.(i).(j) <- 1;;
```

Les fonctions vues précédemment deviennent (on donne la version pour les graphes orientés) :

```
let voisins g i =
  let vi = ref [] in
  for j = Array.length g - 1 downto 0 do
  if g.(i).(j)=1 then vi := j :: !vi
  done;
  !vi;;

let ajoute_arete g i j = g.(i).(j) <- 1;;

let supprime_arete g i j = g.(i).(j) <- 0;;
```

Les fonctions vues précédemment deviennent (on donne la version pour les graphes orientés) :

```
let voisins g i =
  let vi = ref [] in
  for j = Array.length g - 1 downto 0 do
  if g.(i).(j)=1 then vi := j :: !vi
  done;
  !vi;;

let ajoute_arete g i j = g.(i).(j) <- 1;;

let supprime_arete g i j = g.(i).(j) <- 0;;
```

Désorienter un graphe orienté

Désorienter un graphe orienté revient à rendre sa matrice d'adjacence symétrique ce qu'on peut coder par exemple ainsi :

Désorienter un graphe orienté revient à rendre sa matrice d'adjacence symétrique ce qu'on peut coder par exemple ainsi :

```
let desoriente g =
  let n = Array.length g in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = i+1 to n-1 do
      if g.(j).(i) = 1 then g.(i).(j) <- 1
      else if g.(i).(j) = 1 then g.(j).(i) <-1
  done;
done;;
```

Il peut être utile de passer de l'un des modes de représentation à l'autre.

Il peut être utile de passer de l'un des modes de représentation à l'autre.Le fonction donnant le tableau des listes d'adjacence à partir de la matrice d'adjacence est facile à écrire :

Il peut être utile de passer de l'un des modes de représentation à l'autre.Le fonction donnant le tableau des listes d'adjacence à partir de la matrice d'adjacence est facile à écrire :

```
let listes_de_mat m =
  let n = Array.length m in
  let g = Array.make n [] in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = n-1 downto 0 do
    if m.(i).(j) = 1 then g.(i) <- j::g.(i)
    done;
  done;
  g;;
```

Pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe donné par listes d'adjacence, nous écrivons tout d'abord une fonction `faire_pour_liste` qui étant donné une liste `l=[l1;..;lp]` et une fonction `f` exécute la succession d'instructions `f(l1);...;f(lp);`

Pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe donné par listes d'adjacence, nous écrivons tout d'abord une fonction `faire_pour_liste` qui étant donné une liste `l=[l1;..;lp]` et une fonction `f` exécute la succession d'instructions `f(l1);...;f(lp);`

```
let rec faire_pour_liste l f = match l with
  | [] -> ()
  | t::q -> f t; faire_pour_liste q f;;
```

Pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe donné par listes d'adjacence, nous écrivons tout d'abord une fonction `faire_pour_liste` qui étant donné une liste `l=[l1;..;lp]` et une fonction `f` exécute la succession d'instructions `f(l1);...;f(lp);`

```
let rec faire_pour_liste l f = match l with
  | [] -> ()
  | t::q -> f t; faire_pour_liste q f;;
```

```
let mat_de_listes g =
  let n = Array.length g in
  let m = Array.make_matrix n n 0 in
  for i = 0 to n-1 do
    faire_pour_liste g.(i) (fun j -> m.(i).(j) <- 1)
  done;
  m;;
```

- Parcourir un graphe, c'est énumérer l'ensemble des sommets accessibles par un chemin à partir d'un sommet donné

- Parcourir un graphe, c'est énumérer l'ensemble des sommets accessibles par un chemin à partir d'un sommet donné, pour leur faire subir un certain traitement.

- Parcourir un graphe, c'est énumérer l'ensemble des sommets accessibles par un chemin à partir d'un sommet donné, pour leur faire subir un certain traitement.
- Différentes solutions sont possibles, mais en général, celles-ci tiennent à jour deux listes : la liste des sommets visités (" déjàVus ",) et la liste des sommets en cours de traitement (" àTraiter ")

- Parcourir un graphe, c'est énumérer l'ensemble des sommets accessibles par un chemin à partir d'un sommet donné, pour leur faire subir un certain traitement.
- Différentes solutions sont possibles, mais en général, celles-ci tiennent à jour deux listes : la liste des sommets visités (" déjàVus ",) et la liste des sommets en cours de traitement (" àTraiter ")
- ces méthodes vont différer par la façon dont sont insérés puis retirés les sommets dans cette structure de données.

procedure PARCOURS(sommet s_0)

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**
    àTraiter $\rightarrow s$

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**
    àTraiter $\rightarrow s$
    traiter(s)

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**
    àTraiter $\rightarrow s$
    traiter(s)
    for $t \in$ voisins(s) **do**

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**
    àTraiter $\rightarrow s$
    traiter(s)
    for $t \in$ voisins(s) **do**
      if $t \notin$ déjàVus **then**

procedure PARCOURS(sommet s_0)
  àTraiter $\leftarrow s_0$
  déjàVus $\leftarrow s_0$
  while àTraiter $\neq \emptyset$ **do**
    àTraiter $\rightarrow s$
    traiter(s)
    for $t \in$ voisins(s) **do**
      if $t \notin$ déjàVus **then**
        Rajouter t à àTraiter et à déjàVus

Arborescence associée à un parcours

Arborescence associée à un parcours

- À chaque parcours débutant en s_0 peut être associé un arbre enraciné en s_0

Arborescence associée à un parcours

- À chaque parcours débutant en s_0 peut être associé un arbre enraciné en s_0
- on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$

Arborescence associée à un parcours

- À chaque parcours débutant en s_0 peut être associé un arbre enraciné en s_0
- on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$
- à chaque insertion d'un nouveau sommet t dans la liste "àTraiter", on ajoute le sommet t et l'arêtes (s, t).

Arborescence associée à un parcours

- À chaque parcours débutant en s_0 peut être associé un arbre enraciné en s_0
- on débute avec le graphe $(\{s_0\}, \emptyset)$
- à chaque insertion d'un nouveau sommet t dans la liste "àTraiter", on ajoute le sommet t et l'arêtes (s, t).
- On construit ainsi un graphe connexe ayant k sommets et $k - 1$ arêtes c'est-à-dire un arbre.

Coût du parcours

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.
Pour assurer la condition précédente, on utilisera un tableau de booléens pour représenter "déjàVus" ce qui permettra de marquer chaque sommet au moment où il entre dans la liste "àTraiter" .

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.
Pour assurer la condition précédente, on utilisera un tableau de booléens pour représenter "déjàVus" ce qui permettra de marquer chaque sommet au moment où il entre dans la liste "àTraiter" .

Nous allons nous intéresser à deux types de parcours,

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.
Pour assurer la condition précédente, on utilisera un tableau de booléens pour représenter "déjàVus" ce qui permettra de marquer chaque sommet au moment où il entre dans la liste "àTraiter" .

Nous allons nous intéresser à deux types de parcours, qui diffèrent seulement par la façon d'extraire les sommets de la liste en cours de traitement : les parcours en largeur et en profondeur.

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.
Pour assurer la condition précédente, on utilisera un tableau de booléens pour représenter "déjàVus" ce qui permettra de marquer chaque sommet au moment où il entre dans la liste "àTraiter" .

Nous allons nous intéresser à deux types de parcours, qui diffèrent seulement par la façon d'extraire les sommets de la liste en cours de traitement : les parcours en largeur et en profondeur.Pour le codage, les graphes seront définis par listes d'adjacence

Coût du parcours

Le coût total est un $O(n+p)$ à la condition toutefois de déterminer si un sommet a déjà été visité avec un coût constant.
Pour assurer la condition précédente, on utilisera un tableau de booléens pour représenter "déjàVus" ce qui permettra de marquer chaque sommet au moment où il entre dans la liste "àTraiter" .

Nous allons nous intéresser à deux types de parcours, qui diffèrent seulement par la façon d'extraire les sommets de la liste en cours de traitement : les parcours en largeur et en profondeur.Pour le codage, les graphes seront définis par listes d'adjacence et on supposera donnée une fonction `traitement` à appliquer aux sommets parcourus.

L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),

L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),consiste à utiliser une file d'attente pour stocker les sommets à traiter :

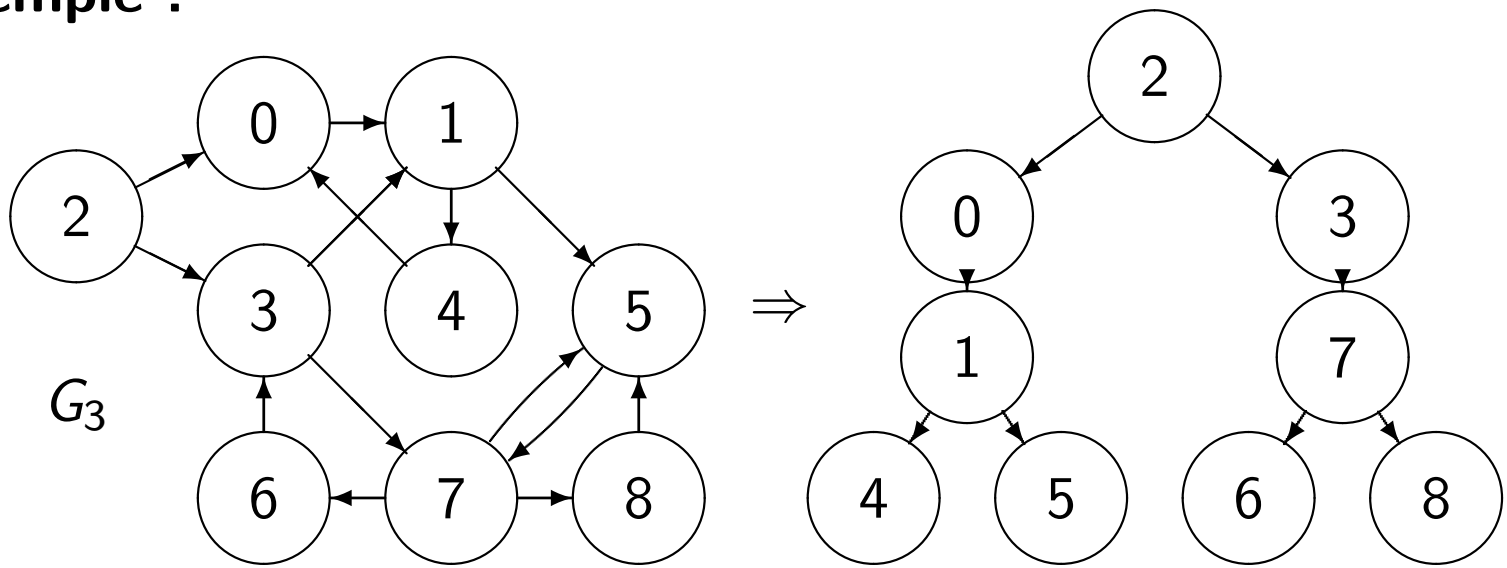
L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),consiste à utiliser une file d'attente pour stocker les sommets à traiter :tous les voisins sont traités avant de parcourir le reste du graphe.

L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),consiste à utiliser une file d'attente pour stocker les sommets à traiter :tous les voisins sont traités avant de parcourir le reste du graphe.
On traite ainsi successivement tous les sommets à une distance égale à 1 du sommet initial,

L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),consiste à utiliser une file d'attente pour stocker les sommets à traiter :tous les voisins sont traités avant de parcourir le reste du graphe.
On traite ainsi successivement tous les sommets à une distance égale à 1 du sommet initial,puis tous ceux à une distance égale à 2, etc.

L'algorithme de parcours en largeur (appelé BFS, pour Breadth First Search),consiste à utiliser une file d'attente pour stocker les sommets à traiter :tous les voisins sont traités avant de parcourir le reste du graphe.
On traite ainsi successivement tous les sommets à une distance égale à 1 du sommet initial,puis tous ceux à une distance égale à 2, etc.
Ce type de parcours est donc idéal pour trouver la plus courte distance entre deux sommets du graphe.

Exemple :



Codage

Codage

```
let bfs g traitement s0 =
  let t = Array.make (Array.length g) false in
  t.(s0) <- true;
  let rec traiter li = match li with
    | [] -> ()
    | x::q -> traitement x; traiter (q @ voisins
g.(x))
```

Codage

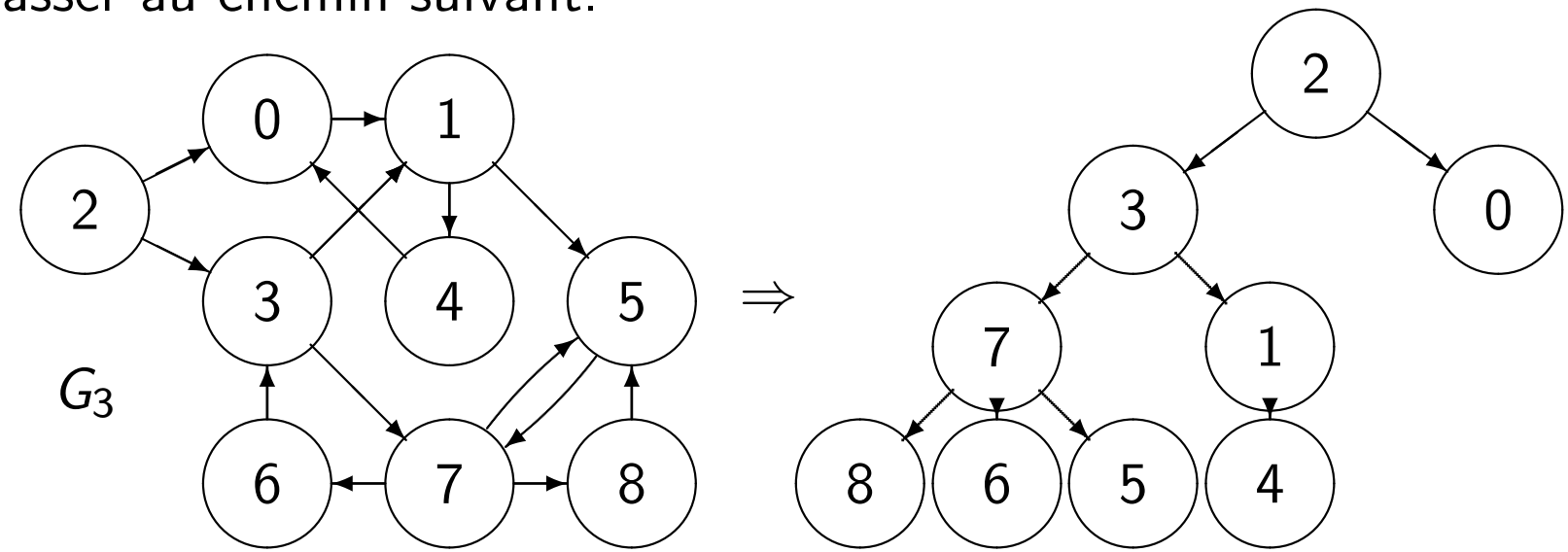
```
let bfs g traitement s0 =
  let t = Array.make (Array.length g) false in
  t.(s0) <- true;
  let rec traiter li = match li with
    | [] -> ()
    | x::q -> traitement x; traiter (q @ voisins
g.(x))
  and voisins li = match li with
    | [] -> []
    | y::q when t.(y) -> voisins q
    | y::q -> t.(y) <- true; y :: voisins q
  in traiter [s0];;
```

Le parcours en profondeur (appelé DFS pour Depth First Search)

Le parcours en profondeur (appelé DFS pour Depth First Search)consiste à utiliser une pile pour stocker les éléments à traiter.

Le parcours en profondeur (appelé DFS pour Depth First Search)consiste à utiliser une pile pour stocker les éléments à traiter. On explore ainsi chaque chemin jusqu'au bout avant de passer au chemin suivant.

Le parcours en profondeur (appelé DFS pour Depth First Search)consiste à utiliser une pile pour stocker les éléments à traiter. On explore ainsi chaque chemin jusqu'au bout avant de passer au chemin suivant.



Pour coder l'algorithme de parcours en profondeur, nous utiliserons le module `Stack` d'OCaml et en particulier ses fonctions

- `create` (`create()` crée une pile vide)

Pour coder l'algorithme de parcours en profondeur, nous utiliserons le module `Stack` d'OCaml et en particulier ses fonctions

- `create` (`create()` crée une pile vide)
- `push` (`push x p` ajoute l'élément `x` au sommet de la pile `p`)

Pour coder l'algorithme de parcours en profondeur, nous utiliserons le module `Stack` d'OCaml et en particulier ses fonctions

- `create` (`create()` crée une pile vide)
- `push` (`push x p` ajoute l'élément `x` au sommet de la pile `p`)
- `pop` (`pop p` enlève l'élément qui est au sommet de la pile et le renvoie ou retourne `Stack.Empty` si la pile est vide)

Pour coder l'algorithme de parcours en profondeur, nous utiliserons le module `Stack` d'OCaml et en particulier ses fonctions

- `create` (`create()` crée une pile vide)
- `push` (`push x p` ajoute l'élément `x` au sommet de la pile `p`)
- `pop` (`pop p` enlève l'élément qui est au sommet de la pile et le renvoie ou retourne `Stack.Empty` si la pile est vide)
- `is_empty` (`is_empty p` retourne un booléen indiquant si la pile est vide ou non

```
open Stack;;
```

```
open Stack;;
let dfs g traitement s =
```

```
open Stack;;
let dfs g traitement s =
  let dejavu = Array.make (Array.length g) false
  and atraiter = create() in
  push s atraiter ; dejavu.(s) <- true ;
```

```
open Stack;;
let dfs g traitement s =
  let dejavu = Array.make (Array.length g) false
  and atraiter = create() in
  push s atraiter ; dejavu.(s) <- true ;
  let rec ajoute_voisin l = match l with
    | [] -> ()
    | t::q when dejavu.(t) -> ajoute_voisin q
    | t::q -> push t atraiter ; dejavu.(t) <- true ;
      ajoute_voisin q
```

```
open Stack;;
let dfs g traitement s =
  let dejavu = Array.make (Array.length g) false
  and atraiter = create() in
  push s atraiter ; dejavu.(s) <- true ;
  let rec ajoute_voisin l = match l with
    | [] -> ()
    | t::q when dejavu.(t) -> ajoute_voisin q
    | t::q -> push t atraiter ; dejavu.(t) <- true ;
      ajoute_voisin q
  in
  while not (is_empty atraiter) do
    let s = pop atraiter in traitement s ;
                            ajoute_voisin g.(s)
    done;;
```

Exemples d'executions :

```
let g3 =
[|[1];[4;5];[0;3];[1;7];[0];[7];[3];[5;6;8];[5]|];;
dfs g3 (print_int) 2;;
237865140- : unit = ()
dfs g3 (print_int) 3;;
37865140- : unit = ()
dfs g3 (print_int) 1;;
15786340- : unit = ()
```

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet s, les sommets obtenus

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet `s`, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet `s`.

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet `s`, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet `s`.

Donc pour tester si un graphe non orienté est connexe,

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet s, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet s.

Donc pour tester si un graphe non orienté est connexe,il suffit de lancer un parcours et de vérifier si l'on obtient bien tous les sommets du graphe.

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet s, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet s.

Donc pour tester si un graphe non orienté est connexe,il suffit de lancer un parcours et de vérifier si l'on obtient bien tous les sommets du graphe.

De même, pour obtenir les composantes connexes d'un graphe non orienté,

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet `s`, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet `s`.

Donc pour tester si un graphe non orienté est connexe,il suffit de lancer un parcours et de vérifier si l'on obtient bien tous les sommets du graphe.

De même, pour obtenir les composantes connexes d'un graphe non orienté,on choisit un sommet et on effectue un parcours à partir de ce sommet,

Si l'on effectue un parcours (en largeur ou en profondeur) d'un graphe non orienté à partir d'un sommet `s`, les sommets obtenus correspondent à la composante connexe du sommet `s`.

Donc pour tester si un graphe non orienté est connexe,il suffit de lancer un parcours et de vérifier si l'on obtient bien tous les sommets du graphe.

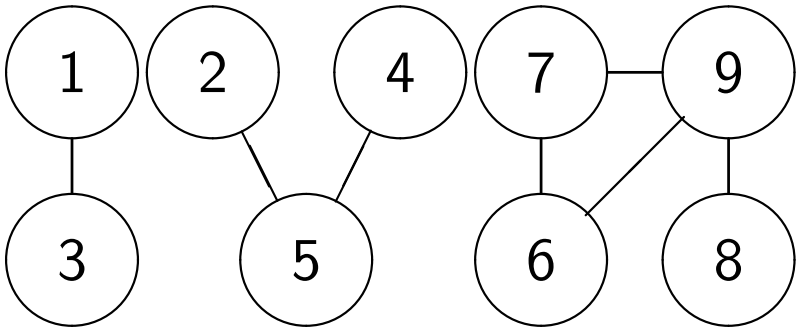
De même, pour obtenir les composantes connexes d'un graphe non orienté,on choisit un sommet et on effectue un parcours à partir de ce sommet,puis on recommence tant qu'il reste des sommets non obtenus.

```
let composantes g =
  let n = Array.length g in
  let t = Array.make n false in
```

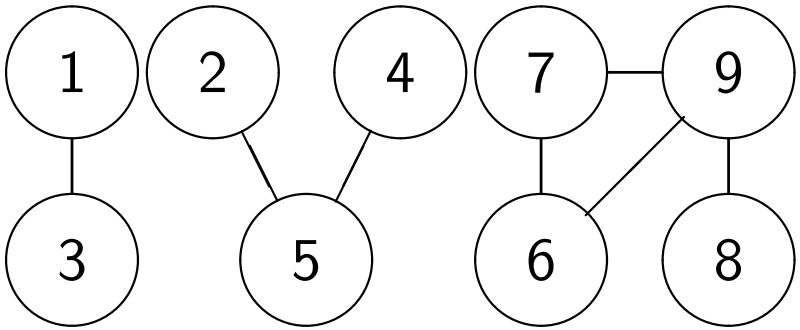
```
let composantes g =
  let n = Array.length g in
  let t = Array.make n false in
  let rec bfs li = match li with
    | [] -> []
    | x :: q when t.(x) -> bfs q
    | x :: q -> t.(x) <- true; x :: bfs (q @ g.(x))
  in
```

```
let composantes g =
  let n = Array.length g in
  let t = Array.make n false in
  let rec bfs li = match li with
    | [] -> []
    | x :: q when t.(x) -> bfs q
    | x :: q -> t.(x) <- true; x :: bfs (q @ g.(x))
  in
  let rec aux acc x = match x with
    |_ when x = n -> acc
    |_ when t.(x) -> aux acc (x+1)
    |_ -> aux (bfs [x] :: acc) (x+1) in
  aux [] 0;;
```

Exemple : Appliquons la fonction `composantes` au graphe suivant :



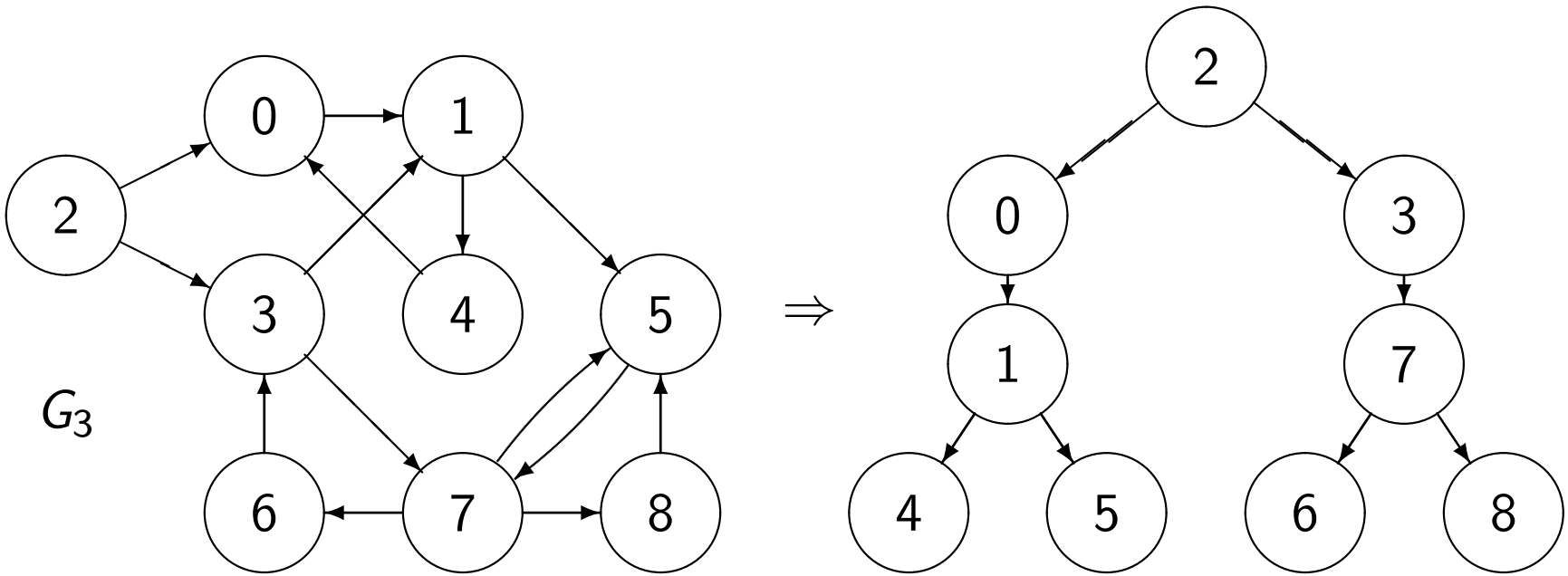
Exemple : Appliquons la fonction `composantes` au graphe suivant :



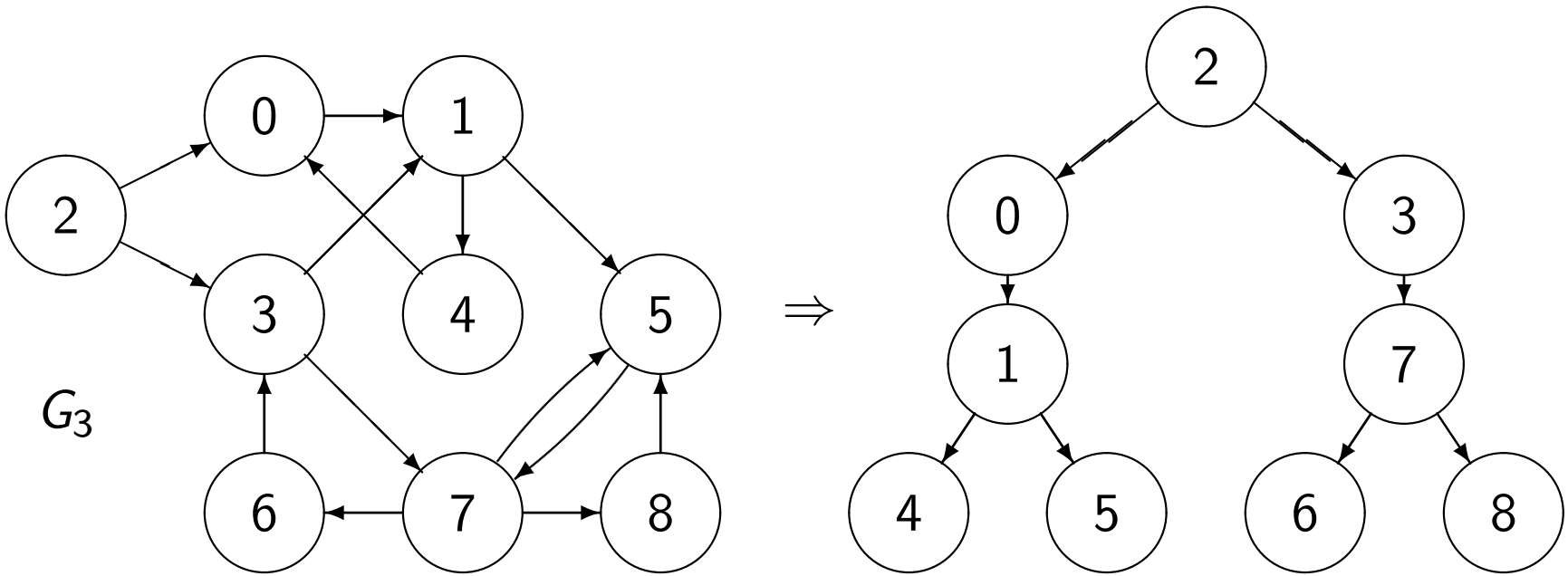
let g = [|[6 ;7 ;8] ;[3] ;[5] ;[1] ;[5] ;[2 ;4] ;[0 ;7] ;[0 ;6] ;[0]|] ; ;
composantes g ; ;
− : int list list = [[2 ; 5 ; 4] ; [1 ; 3] ; [0 ; 6 ; 7 ; 8]]

Pour déterminer la distance entre deux sommets d'un graphe non pondéré, il suffit d'effectuer un parcours en largeur à partir de l'un des sommets jusqu'à trouver l'autre.

Pour déterminer la distance entre deux sommets d'un graphe non pondéré, il suffit d'effectuer un parcours en largeur à partir de l'un des sommets jusqu'à trouver l'autre.

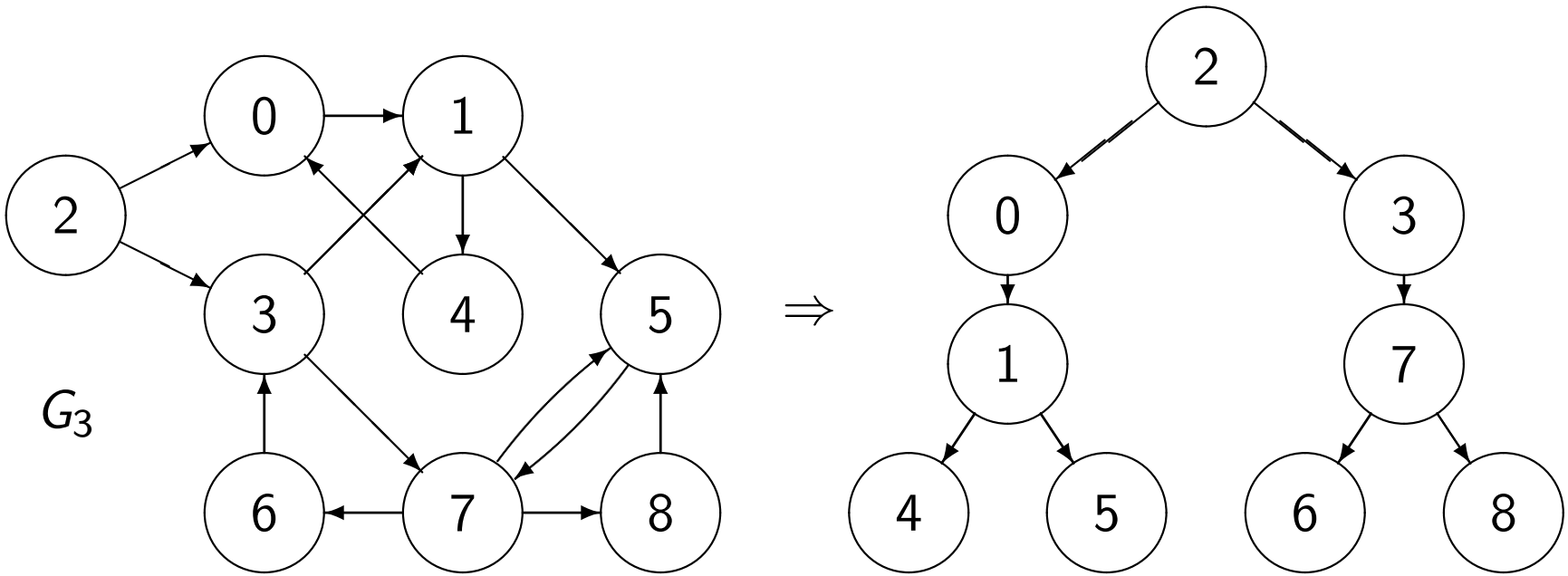


Pour déterminer la distance entre deux sommets d'un graphe non pondéré, il suffit d'effectuer un parcours en largeur à partir de l'un des sommets jusqu'à trouver l'autre.



Cependant, connaître le nombre minimal d'arêtes à parcourir entre deux sommets n'est pas toujours suffisant :

Pour déterminer la distance entre deux sommets d'un graphe non pondéré, il suffit d'effectuer un parcours en largeur à partir de l'un des sommets jusqu'à trouver l'autre.



Cependant, connaître le nombre minimal d'arêtes à parcourir entre deux sommets n'est pas toujours suffisant :de nombreux problèmes ajoutent une pondération à chaque arête.

Définition

- *Un graphe pondéré (orienté ou non) est un triplet $G = (S, A, f)$ tel que (S, A) est un graphe et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si $a \in A$, $f(a)$ est appelé poids de l'arête a.*

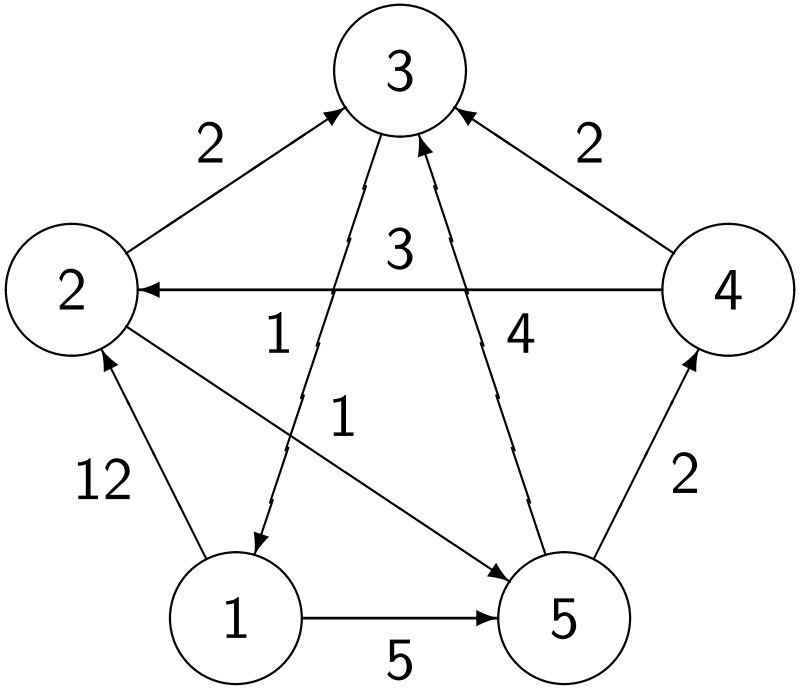
Définition

- *Un graphe pondéré (orienté ou non) est un triplet $G = (S, A, f)$ tel que (S, A) est un graphe et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si $a \in A$, $f(a)$ est appelé poids de l'arête a.*
- *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $c = x_0, x_1, \ldots, x_N$ un chemin dans le graphe (S, A). Alors le poids du chemin c est $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, x_{i+1})$*

Définition

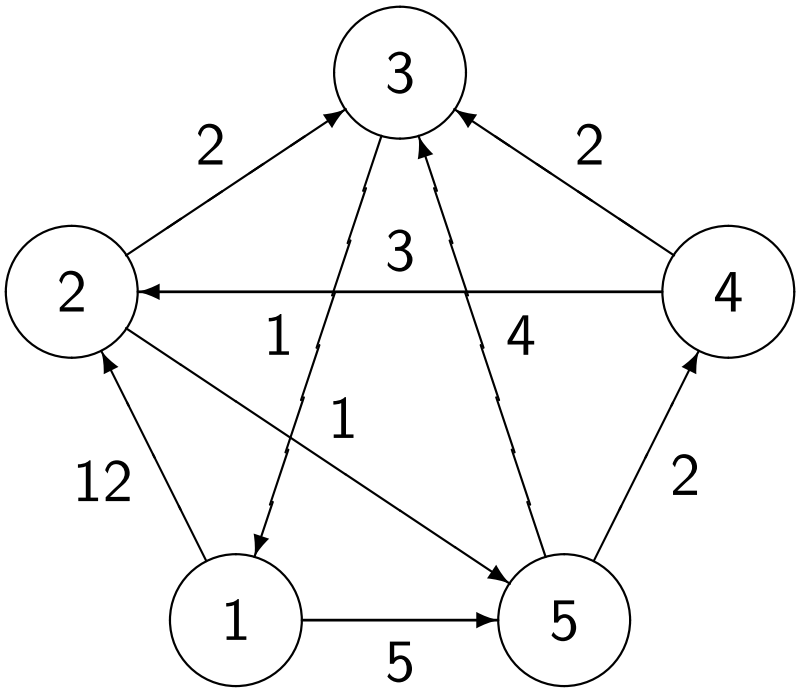
- *Un graphe pondéré (orienté ou non) est un triplet $G = (S, A, f)$ tel que (S, A) est un graphe et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si $a \in A$, $f(a)$ est appelé poids de l'arête a.*
- *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $c = x_0, x_1, \ldots, x_N$ un chemin dans le graphe (S, A). Alors le poids du chemin c est $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, x_{i+1})$*
- *La distance entre deux sommets x et y de G est le poids minimal d'un chemin de x à y. Un plus court chemin de x à y dans G est un chemin de x à y de poids égal à la distance entre x et y.*

Exemple : Dans le graphe suivant :



la distance entre les sommets 1 et 2

Exemple : Dans le graphe suivant :



la distance entre les sommets 1 et 2 est égale à 10 et 1,5,4,2 est un plus court chemin entre ces deux sommets.

Remarque : Condition pour pouvoir assurer l'existence d'un plus court chemin :

Remarque : Condition pour pouvoir assurer l'existence d'un plus court chemin :qu'il n'y ait pas de cycle de poids strictement négatif

Remarque : Condition pour pouvoir assurer l'existence d'un plus court chemin :qu'il n'y ait pas de cycle de poids strictement négatif
Dans la suite, on supposera que le graphe considéré est connexe et ne possède pas de cycle de poids négatif.

Problèmes de plus courts chemins

Il existe trois problèmes de plus courts chemins :

Problèmes de plus courts chemins

Il existe trois problèmes de plus courts chemins :

- (i) calculer le chemin de poids minimal entre une origine a et une destination b ;

Problèmes de plus courts chemins

Il existe trois problèmes de plus courts chemins :

- (i) calculer le chemin de poids minimal entre une origine a et une destination b ;
- (ii) calculer les chemins de poids minimal entre une origine a et tous les autres sommets du graphe ;

Problèmes de plus courts chemins

Il existe trois problèmes de plus courts chemins :

- (i) calculer le chemin de poids minimal entre une origine a et une destination b ;
- (ii) calculer les chemins de poids minimal entre une origine a et tous les autres sommets du graphe ;
- (iii) calculer tous les chemins de poids minimal entre deux sommets quelconques du graphe.

Résolution de (iii) : algorithme de Floyd-Warshall

Problèmes de plus courts chemins

Il existe trois problèmes de plus courts chemins :

- (i) calculer le chemin de poids minimal entre une origine a et une destination b ;
- (ii) calculer les chemins de poids minimal entre une origine a et tous les autres sommets du graphe ;
- (iii) calculer tous les chemins de poids minimal entre deux sommets quelconques du graphe.

Résolution de (iii) : algorithme de Floyd-Warshall
Résolution de (ii) : algorithme de Dijkstra

Principe de sous-optimalité

Principe de sous-optimalité

Proposition

Si $a \rightsquigarrow b$ est un plus court chemin qui passe par c, alors ses sous-chemins $a \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$ sont eux aussi des plus courts chemins

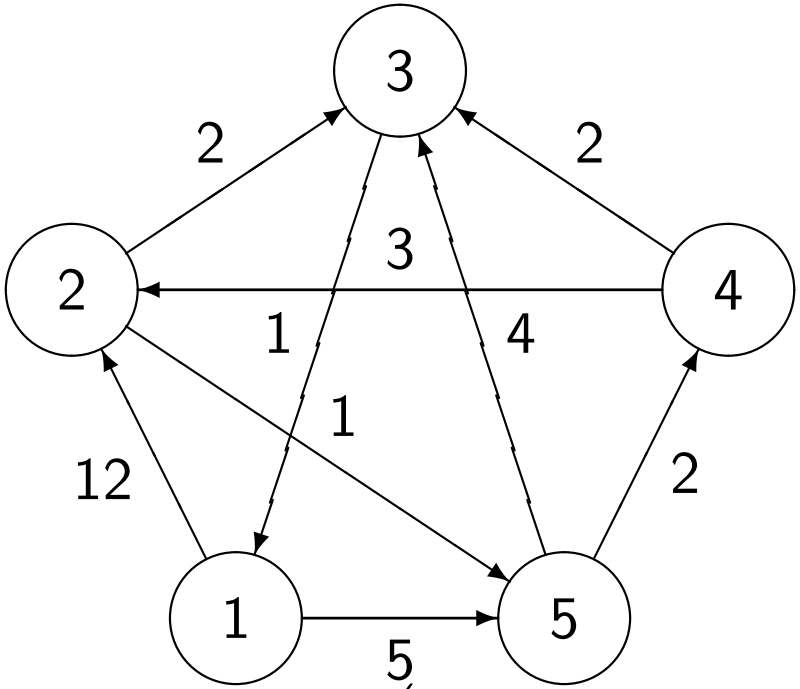
Principe de sous-optimalité

Proposition

Si $a \rightsquigarrow b$ est un plus court chemin qui passe par c, alors ses sous-chemins $a \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$ sont eux aussi des plus courts chemins

Démonstration : En effet, s'il existait un chemin plus court entre, par exemple a et c, il suffirait de l'emprunter lors du trajet entre a et b pour contredire le caractère minimal du chemin $a \rightsquigarrow b$ ♯

Pour



la matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Principe de l'algorithme

Principe de l'algorithme

Si n désigne l'ordre du graphe pondéré G, et M sa matrice d'adjacence, l'algorithme de Floyd-Warshall consiste à calculer la suite finie de matrices $M^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $M^{(0)} = M$ et :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall (i,j),\ m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

Principe de l'algorithme

Si n désigne l'ordre du graphe pondéré G, et M sa matrice d'adjacence, l'algorithme de Floyd-Warshall consiste à calculer la suite finie de matrices $M^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $M^{(0)} = M$ et :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall (i,j),\ m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

Proposition

Avec les notations précédentes, $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$ et $\forall (i,j)$, $m_{i,j}^{(k)}$ est égal au poids du chemin minimal reliant s_i à s_j et ne passant que par les sommets de $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.

Principe de l'algorithme

Si n désigne l'ordre du graphe pondéré G, et M sa matrice d'adjacence, l'algorithme de Floyd-Warshall consiste à calculer la suite finie de matrices $M^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $M^{(0)} = M$ et :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall (i,j),\ m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

Proposition

Avec les notations précédentes, $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$ et $\forall (i,j)$, $m_{i,j}^{(k)}$ est égal au poids du chemin minimal reliant s_i à s_j et ne passant que par les sommets de $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.
En particulier, $\forall (i,j)$, $m_{i,j}^{(n)}$ est le poids minimal d'un chemin reliant s_i à s_j.

Principe de l'algorithme

Si n désigne l'ordre du graphe pondéré G, et M sa matrice d'adjacence, l'algorithme de Floyd-Warshall consiste à calculer la suite finie de matrices $M^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $M^{(0)} = M$ et :

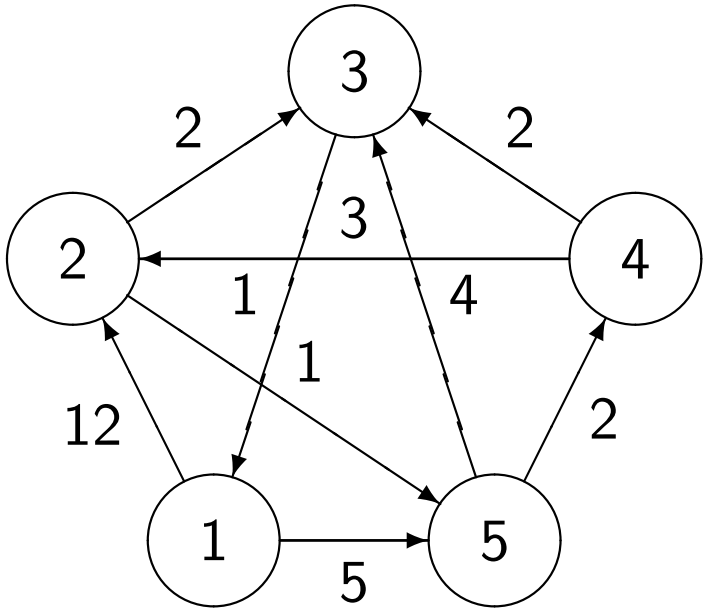
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall (i,j),\ m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

Proposition

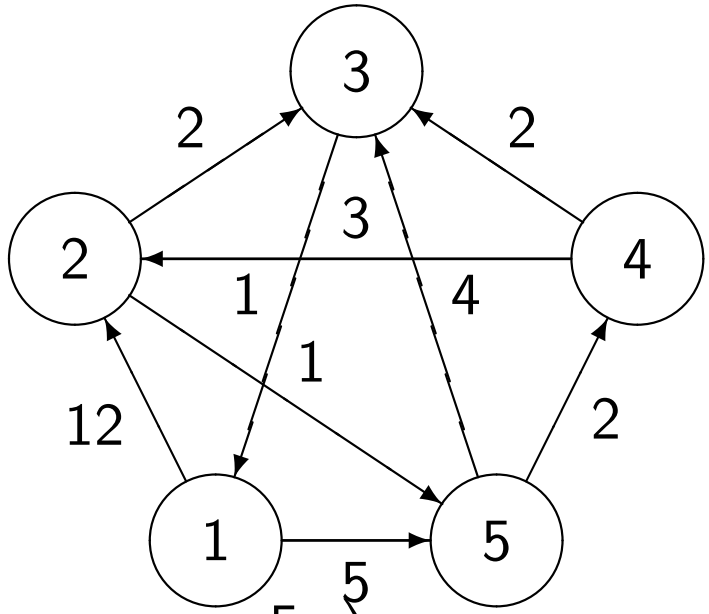
Avec les notations précédentes, $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$ et $\forall (i,j)$, $m_{i,j}^{(k)}$ est égal au poids du chemin minimal reliant s_i à s_j et ne passant que par les sommets de $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.
En particulier, $\forall (i,j)$, $m_{i,j}^{(n)}$ est le poids minimal d'un chemin reliant s_i à s_j.

Démonstration :

Sur l'exemple

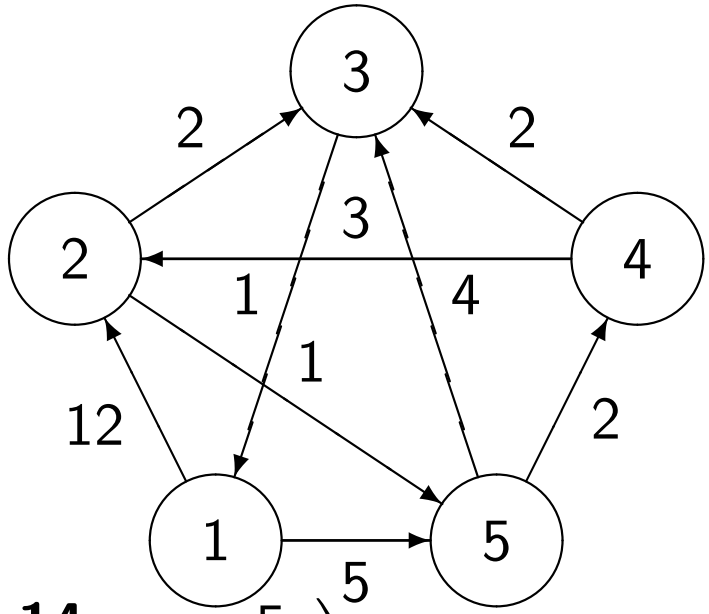


Sur l'exemple



$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & \mathbf{13} & 0 & \infty & \mathbf{6} \\ \infty & 3 & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'exemple



$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \mathbf{14} & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & 13 & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 2 & 0 & \mathbf{4} \\ \infty & \infty & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Implémentation

Implémentation

Pour gérer la valeur ∞, on peut définir le type somme suivant :

```
type poids = Inf | P of int;;
```

Implémentation

Pour gérer la valeur ∞, on peut définir le type somme suivant :

```
type poids = Inf | P of int;;
```

ce qui nous permet de représenter un graphe pondéré par le type `poids array array`.

On a besoin de définir quelques fonctions de deux objets de type `poids`.

On a besoin de définir quelques fonctions de deux objets de type `poids`.

```
let som p1 p2 = match p1, p2 with
  | Inf , _ -> Inf
  | _ , Inf -> Inf
  | P a , P b -> P (a + b);;
```

On a besoin de définir quelques fonctions de deux objets de type `poids`.

```
 let som p1 p2 = match p1, p2 with
   | Inf , _ -> Inf
   | _ , Inf -> Inf
   | P a , P b -> P (a + b);;
let mini p1 p2 = match p1, p2 with
   | Inf , x -> x
   | x , Inf -> x
   | P a , P b -> P (min a b);;
```

On a besoin de définir quelques fonctions de deux objets de type poids.

```
 let som p1 p2 = match p1, p2 with
   | Inf , _ -> Inf
   | _ , Inf -> Inf
   | P a , P b -> P (a + b);;
let mini p1 p2 = match p1, p2 with
   | Inf , x -> x
   | x , Inf -> x
   | P a , P b -> P (min a b);;
let inferieur p1 p2 = match p1, p2 with
   | Inf , _ -> false
   | _ , Inf -> true
   | P a , P b -> a < b;;
```

Remarquons qu'il est possible de calculer les différentes valeurs de la suite $(M^{(k)})$ en utilisant une seule matrice

Remarquons qu'il est possible de calculer les différentes valeurs de la suite $(M^{(k)})$ en utilisant une seule matrice
En effet, la formule

$$m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

reste valable si on remplace $m_{i,k+1}^{(k)}$ par $m_{i,k+1}^{(k+1)}$

Remarquons qu'il est possible de calculer les différentes valeurs de la suite $(M^{(k)})$ en utilisant une seule matrice
En effet, la formule

$$m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

reste valable si on remplace $m_{i,k+1}^{(k)}$ par $m_{i,k+1}^{(k+1)}$ étant donné qu'ils sont égaux

Remarquons qu'il est possible de calculer les différentes valeurs de la suite $(M^{(k)})$ en utilisant une seule matrice
En effet, la formule

$$m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

reste valable si on remplace $m_{i,k+1}^{(k)}$ par $m_{i,k+1}^{(k+1)}$ étant donné qu'ils sont égaux (pas de cycle de poids négatif).

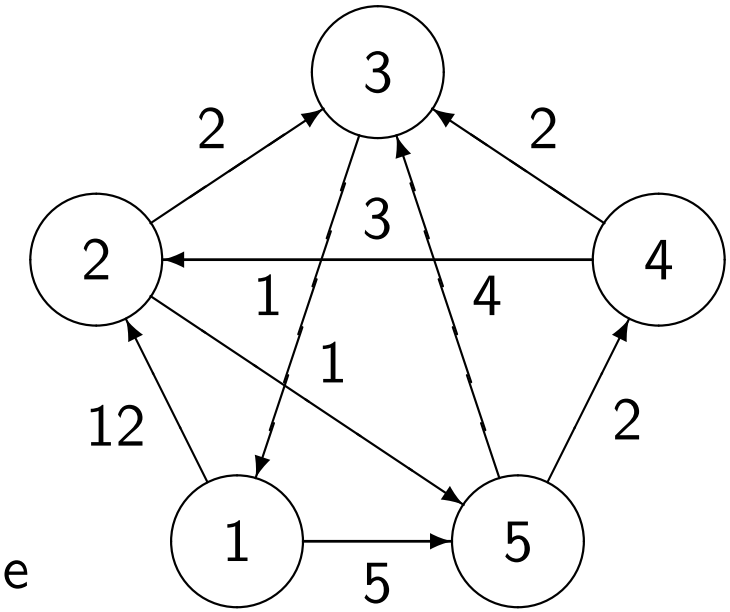
Remarquons qu'il est possible de calculer les différentes valeurs de la suite $(M^{(k)})$ en utilisant une seule matrice
En effet, la formule

$$m_{i,j}^{(k+1)} = \min\left(m_{i,j}^{(k)}, m_{i,k+1}^{(k)} + m_{k+1,j}^{(k)}\right)$$

reste valable si on remplace $m_{i,k+1}^{(k)}$ par $m_{i,k+1}^{(k+1)}$ étant donné qu'ils sont égaux (pas de cycle de poids négatif). De même, on a $m_{k+1,j}^{(k)} = m_{k+1,j}^{(k+1)}$.

```
let floydWarshall g =
  let n = Array.length g in
  let m = Array.make_matrix n n Inf in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = 0 to n-1 do m.(i).(j) <- g.(i).(j)
    done;
  done;
```

```
let floydWarshall g =
  let n = Array.length g in
  let m = Array.make_matrix n n Inf in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = 0 to n-1 do m.(i).(j) <- g.(i).(j)
    done;
  done;
  for k = 0 to n-1 do
    for i = 0 to n-1 do
      for j = 0 to n-1 do
  m.(i).(j)<-mini m.(i).(j) (som m.(i).(k) m.(k).(j))
      done;
    done;
  done;
  m;;
```



Pour le graphe ci-dessus la fonction retourne la matrice

```
floydWarshall g;;
- : poids array array =
[|[|P0; P10; P9; P7; P5|]; [|P3; P0; P2; P3; P1|];
[|P1; P11; P0; P8; P6|]; [|P3; P3; P2; P0; P4|];
[|P5; P5; P4; P2; P0|]|]
```

Complexité

Complexité

En raison de la présence des trois boucles `for` la fonction `floydWarshall` a une complexité temporelle en $O(n^3)$ et une complexité spatiale en $O(n^2)$.

Complexité

En raison de la présence des trois boucles `for` la fonction `floydWarshall` a une complexité temporelle en $O(n^3)$ et une complexité spatiale en $O(n^2)$.

Détermination des plus courts chemins

Complexité

En raison de la présence des trois boucles `for` la fonction `floydWarshall` a une complexité temporelle en $O(n^3)$ et une complexité spatiale en $O(n^2)$.

Détermination des plus courts chemins

L'algorithme précédent se contente de calculer le poids des plus courts chemins mais ne garde pas la trace de ces chemins.

Complexité

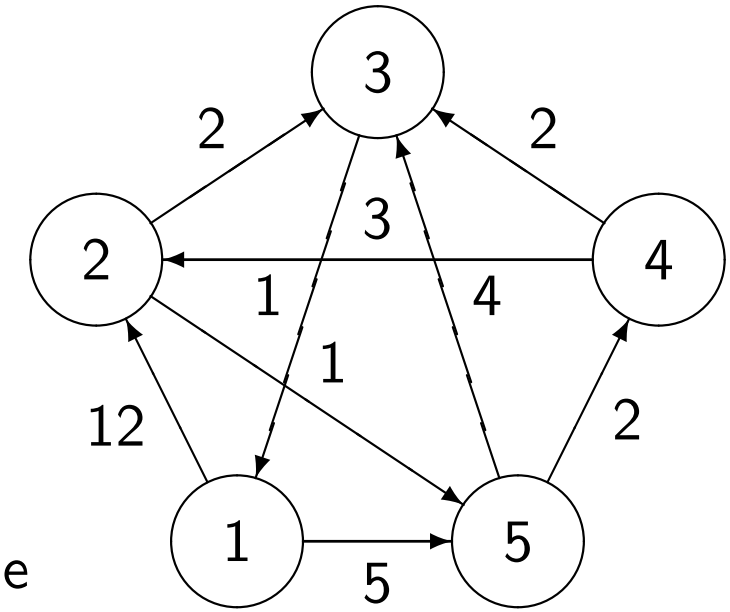
En raison de la présence des trois boucles `for` la fonction `floydWarshall` a une complexité temporelle en $O(n^3)$ et une complexité spatiale en $O(n^2)$.

Détermination des plus courts chemins

L'algorithme précédent se contente de calculer le poids des plus courts chemins mais ne garde pas la trace de ces chemins.Ces derniers peuvent être stockés dans une matrice annexe, ce qui conduit à la version suivante

```
let plusCourtsChemins g =
  let n = Array.length g in
  let m = Array.make_matrix n n Inf
  and c = Array.make_matrix n n [] in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = 0 to n-1 do m.(i).(j) <- g.(i).(j)
    done;
  done;
```

```
let plusCourtsChemins g =
  let n = Array.length g in
  let m = Array.make_matrix n n Inf
  and c = Array.make_matrix n n [] in
  for i = 0 to n-1 do
    for j = 0 to n-1 do m.(i).(j) <- g.(i).(j)
    done;
  done;
  for k = 0 to n-1 do
    for i = 0 to n-1 do
      for j = 0 to n-1 do
        let l = som m.(i).(k) m.(k).(j) in
        if inferieur l m.(i).(j) then
(m.(i).(j)<-l;c.(i).(j)<-c.(i).(k)@[k+1]@c.(k).(j))
      done;
    done;
```



Pour le graphe ci-dessus la fonction retourne la matrice

```
plusCourtsChemins g;; - : int list array array =
[|[|[]; [1; 5; 4; 2]; [1; 5; 3]; [1; 5; 4]; [1; 5]|];
[|[2; 3; 1]; []; [2; 3]; [2; 5; 4]; [2; 5]|];
[|[3; 1]; [3; 1; 5; 4; 2]; []; [3; 1; 5; 4]; [3; 1; 5]|];
[|[4; 3; 1]; [4; 2]; [4; 3]; []; [4; 2; 5]|];
```

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

On considère un graphe non pondéré, orienté ou non. Le problème de la fermeture transitive consiste à déterminer si deux sommets s et t peuvent être reliés par un chemin allant de s à t.

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

On considère un graphe non pondéré, orienté ou non. Le problème de la fermeture transitive consiste à déterminer si deux sommets s et t peuvent être reliés par un chemin allant de s à t. Pour le résoudre, on peut utiliser la matrice d'adjacence associée à ce graphe (remplie de booléens indiquant la présence ou non d'une arête entre deux sommets)

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

On considère un graphe non pondéré, orienté ou non. Le problème de la fermeture transitive consiste à déterminer si deux sommets s et t peuvent être reliés par un chemin allant de s à t. Pour le résoudre, on peut utiliser la matrice d'adjacence associée à ce graphe (remplie de booléens indiquant la présence ou non d'une arête entre deux sommets) et on remplace dans l'algorithme de Floyd-Warshall la relation de récurrence sur les coefficients des matrices $M^{(k)}$ par :

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

On considère un graphe non pondéré, orienté ou non. Le problème de la fermeture transitive consiste à déterminer si deux sommets s et t peuvent être reliés par un chemin allant de s à t. Pour le résoudre, on peut utiliser la matrice d'adjacence associée à ce graphe (remplie de booléens indiquant la présence ou non d'une arête entre deux sommets) et on remplace dans l'algorithme de Floyd-Warshall la relation de récurrence sur les coefficients des matrices $M^{(k)}$ par :

$$m_{i,j}^{(k+1)} = m_{i,j}^{(k)} \text{ ou } (m_{i,k+1}^{(k)} \text{ et } m_{k+1,j}^{(k)})$$

Signification de $m_{i,j}^{(k)}$?

Application au calcul de la fermeture transitive d'un graphe

On considère un graphe non pondéré, orienté ou non. Le problème de la fermeture transitive consiste à déterminer si deux sommets s et t peuvent être reliés par un chemin allant de s à t. Pour le résoudre, on peut utiliser la matrice d'adjacence associée à ce graphe (remplie de booléens indiquant la présence ou non d'une arête entre deux sommets) et on remplace dans l'algorithme de Floyd-Warshall la relation de récurrence sur les coefficients des matrices $M^{(k)}$ par :

$$m_{i,j}^{(k+1)} = m_{i,j}^{(k)} \text{ ou } (m_{i,k+1}^{(k)} \text{ et } m_{k+1,j}^{(k)})$$

Signification de $m_{i,j}^{(k)}$?
L'algorithme ainsi modifié est connu sous le nom d'algorithme de Warshall ou de Roy-Warshall.

Problème :

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.
Hypothèse :

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.
Hypothèse :**les poids des arêtes sont tous positifs**.

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.
Hypothèse :**les poids des arêtes sont tous positifs**.
On notera $\delta(s, s')$ le poids minimum d'un chemin de s à s' appelé encore distance de s à s'.

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.
Hypothèse :**les poids des arêtes sont tous positifs**.
On notera $\delta(s, s')$ le poids minimum d'un chemin de s à s' appelé encore distance de s à s'.

Le principe est de calculer, à chaque étape, le sommet suivant le plus proche de s_0

Problème :déterminer les poids des plus courts chemins depuis un sommet s_0 fixé vers l'ensemble des autres sommets du graphe.
Hypothèse :**les poids des arêtes sont tous positifs**.
On notera $\delta(s, s')$ le poids minimum d'un chemin de s à s' appelé encore distance de s à s'.

Le principe est de calculer, à chaque étape, le sommet suivant le plus proche de s_0 : c'est un **algorithme glouton** (greedy en anglais) qui progresse en cherchant un optimum local et qui permet à la fin d'obtenir un optimum global.

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 :

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0

Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que

$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0

Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que

$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On généralise ce raisonnement pour les sommets suivants.

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0
Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que
$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On généralise ce raisonnement pour les sommets suivants.

- On suppose déterminés les $p-1$ sommets les plus proches de s_0 : $s_1, \ldots, s_{p-1}$. On cherche le suivant : s_p.

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0
Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que
$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On généralise ce raisonnement pour les sommets suivants.

- On suppose déterminés les $p-1$ sommets les plus proches de s_0 : $s_1, \ldots, s_{p-1}$. On cherche le suivant : s_p.
- On note $T = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$ et $S' = S \setminus T$: s_p doit être un sommet de S' tel que $\delta(s_0, s_p) = \min\{\delta(s_0, s'),\ s' \in S'\}$.

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0
Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que
$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On généralise ce raisonnement pour les sommets suivants.

- On suppose déterminés les $p-1$ sommets les plus proches de s_0 : $s_1, \ldots, s_{p-1}$. On cherche le suivant : s_p.
- On note $T = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$ et $S' = S \setminus T$: s_p doit être un sommet de S' tel que $\delta(s_0, s_p) = \min\{\delta(s_0, s'),\ s' \in S'\}$.
- Un chemin de poids minimum de s_0 à s_p ne passe, en dehors de s_p que par des sommets de T
- Si l'avant-dernier sommet du chemin de poids minimum de s_0 à s_p est s_k, on peut écrire : $\delta(s_0, s_p) = \delta(s_0, s_k) + f(s_k, s_p)$.

On commence par la recherche du sommet le plus proche de s_0 : c'est forcément un voisin de s_0
Le plus proche sommet de s_0 est donc s_1 tel que
$f(s_0, s_1) = \min\{f(s_0, s),\ s \text{ voisin de } s_0\}$

On généralise ce raisonnement pour les sommets suivants.

- On suppose déterminés les $p-1$ sommets les plus proches de s_0 : $s_1, \ldots, s_{p-1}$. On cherche le suivant : s_p.
- On note $T = \{s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}\}$ et $S' = S \setminus T$: s_p doit être un sommet de S' tel que $\delta(s_0, s_p) = \min\{\delta(s_0, s'),\ s' \in S'\}$.
- Un chemin de poids minimum de s_0 à s_p ne passe, en dehors de s_p que par des sommets de T
- Si l'avant-dernier sommet du chemin de poids minimum de s_0 à s_p est s_k, on peut écrire : $\delta(s_0, s_p) = \delta(s_0, s_k) + f(s_k, s_p)$.
- Ainsi, s_p est un sommet de S', voisin d'un sommet de T et qui réalise le minimum de
$\{\delta(s_0, s) + f(s, s'),\ s \in T \text{ et } s' \in S',\ s' \text{ voisin de } s\}$

function Dijkstra(sommet s_0)

function Dijkstra(sommet s_0)

$T \leftarrow s_0$

function Dijkstra(sommet s_0)

$T \leftarrow s_0$

for all $s \in S$ **do**

function Dijkstra(sommet s_0)
  $T \leftarrow s_0$
  for all $s \in S$ **do**
    $d_s \leftarrow f(s_0, s)$

function Dijkstra(sommet s_0)
  $T \leftarrow s_0$
  for all $s \in S$ **do**
    $d_s \leftarrow f(s_0, s)$
  while $S \setminus T \neq \emptyset$ **do**

function Dijkstra(sommet s_0)
  $T \leftarrow s_0$
  for all $s \in S$ **do**
    $d_s \leftarrow f(s_0, s)$
  while $S \setminus T \neq \emptyset$ **do**
    déterminer $u \in S \setminus T$ tel que $d_u = \min\{d_{s'} \; ; \; s' \in S \setminus T\}$

function DIJKSTRA(sommet s_0)
  $T \leftarrow s_0$
  for all $s \in S$ **do**
    $d_s \leftarrow f(s_0, s)$
  while $S \setminus T \neq \emptyset$ **do**
    déterminer $u \in S \setminus T$ tel que $d_u = \min\{d_{s'} ; s' \in S \setminus T\}$
    $T \leftarrow T \cup \{u\}$

function Dijkstra(sommet s_0)

$T \leftarrow s_0$

for all $s \in S$ **do**

$d_s \leftarrow f(s_0, s)$

while $S \setminus T \neq \emptyset$ **do**

déterminer $u \in S \setminus T$ tel que $d_u = \min\{d_{s'} \,;\, s' \in S \setminus T\}$

$T \leftarrow T \cup \{u\}$

for $s' \in S \setminus T$ **do** $d_{s'} \leftarrow \min(d_{s'},\, d_u + f(u, s'))$

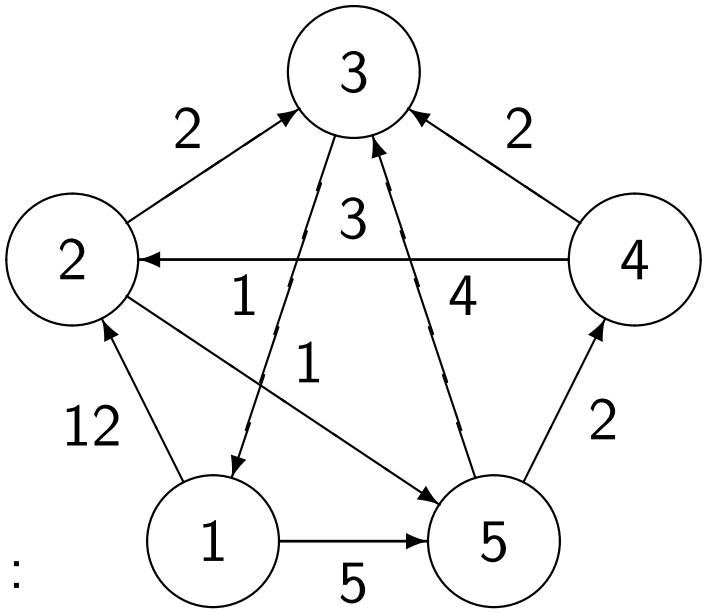
function Dijkstra(sommet s_0)
  $T \leftarrow s_0$
  for all $s \in S$ **do**
    $d_s \leftarrow f(s_0, s)$
  while $S \setminus T \neq \emptyset$ **do**
    déterminer $u \in S \setminus T$ tel que $d_u = \min\{d_{s'} ; s' \in S \setminus T\}$
    $T \leftarrow T \cup \{u\}$
    for $s' \in S \setminus T$ **do** $d_{s'} \leftarrow \min(d_{s'}, d_u + f(u, s'))$
    return d

Proposition

Au cours de l'exécution de l'algorithme de Dijkstra *:*

- *Pour tout $s \in T$, le nombre d_s est le poids d'un chemin minimal de s_0 à s.*
- *Pour tout $s \in S \setminus T$, le nombre d_s est le poids d'un chemin minimal de s_0 à s ne passant que par des sommets de T.*

Mise en oeuvre sur l'exemple :



Étude de la complexité

Étude de la complexité

- L'étude de la complexité de l'algorithme de Dijkstra est un peu délicate car elle dépend du choix de la représentation des structures de données.

Étude de la complexité

- L'étude de la complexité de l'algorithme de Dijkstra est un peu délicate car elle dépend du choix de la représentation des structures de données.
- En gros, si n désigne le nombre de sommets du graphe, on effectue $n-1$ transferts de S' vers T en ayant à chaque fois à déterminer le plus petit élément d'une partie du tableau d puis en modifiant certaines des valeurs de ce tableau en conséquence. Tout ceci ayant un coût linéaire, la complexité totale est a priori en $O(n^2)$.

Étude de la complexité

- L'étude de la complexité de l'algorithme de Dijkstra est un peu délicate car elle dépend du choix de la représentation des structures de données.
- En gros, si n désigne le nombre de sommets du graphe, on effectue $n-1$ transferts de S' vers T en ayant à chaque fois à déterminer le plus petit élément d'une partie du tableau d puis en modifiant certaines des valeurs de ce tableau en conséquence. Tout ceci ayant un coût linéaire, la complexité totale est a priori en $O(n^2)$.
- En revanche, pour les graphes dits « creux », il est possible d'améliorer cette complexité en utilisant une file de priorité (autrement dit un tas et ici un tas-min) pour représenter $S' = S \setminus T$.

Étude de la complexité

- L'étude de la complexité de l'algorithme de Dijkstra est un peu délicate car elle dépend du choix de la représentation des structures de données.
- En gros, si n désigne le nombre de sommets du graphe, on effectue $n-1$ transferts de S' vers T en ayant à chaque fois à déterminer le plus petit élément d'une partie du tableau d puis en modifiant certaines des valeurs de ce tableau en conséquence. Tout ceci ayant un coût linéaire, la complexité totale est a priori en $O(n^2)$.
- En revanche, pour les graphes dits « creux », il est possible d'améliorer cette complexité en utilisant une file de priorité (autrement dit un tas et ici un tas-min) pour représenter $S' = S \setminus T$.
- Ceci permet d'avoir une complexité un coût total en $O((n+m)\log n)$ donc en $O(n \log n)$ si le graphe est connexe

Étude de la complexité

- L'étude de la complexité de l'algorithme de Dijkstra est un peu délicate car elle dépend du choix de la représentation des structures de données.
- En gros, si n désigne le nombre de sommets du graphe, on effectue $n-1$ transferts de S' vers T en ayant à chaque fois à déterminer le plus petit élément d'une partie du tableau d puis en modifiant certaines des valeurs de ce tableau en conséquence. Tout ceci ayant un coût linéaire, la complexité totale est a priori en $O(n^2)$.
- En revanche, pour les graphes dits « creux », il est possible d'améliorer cette complexité en utilisant une file de priorité (autrement dit un tas et ici un tas-min) pour représenter $S' = S \setminus T$.
- Ceci permet d'avoir une complexité un coût total en $O((n+m)\log n)$ donc en $O(n \log n)$ si le graphe est connexe

Détermination des chemins de poids minimum

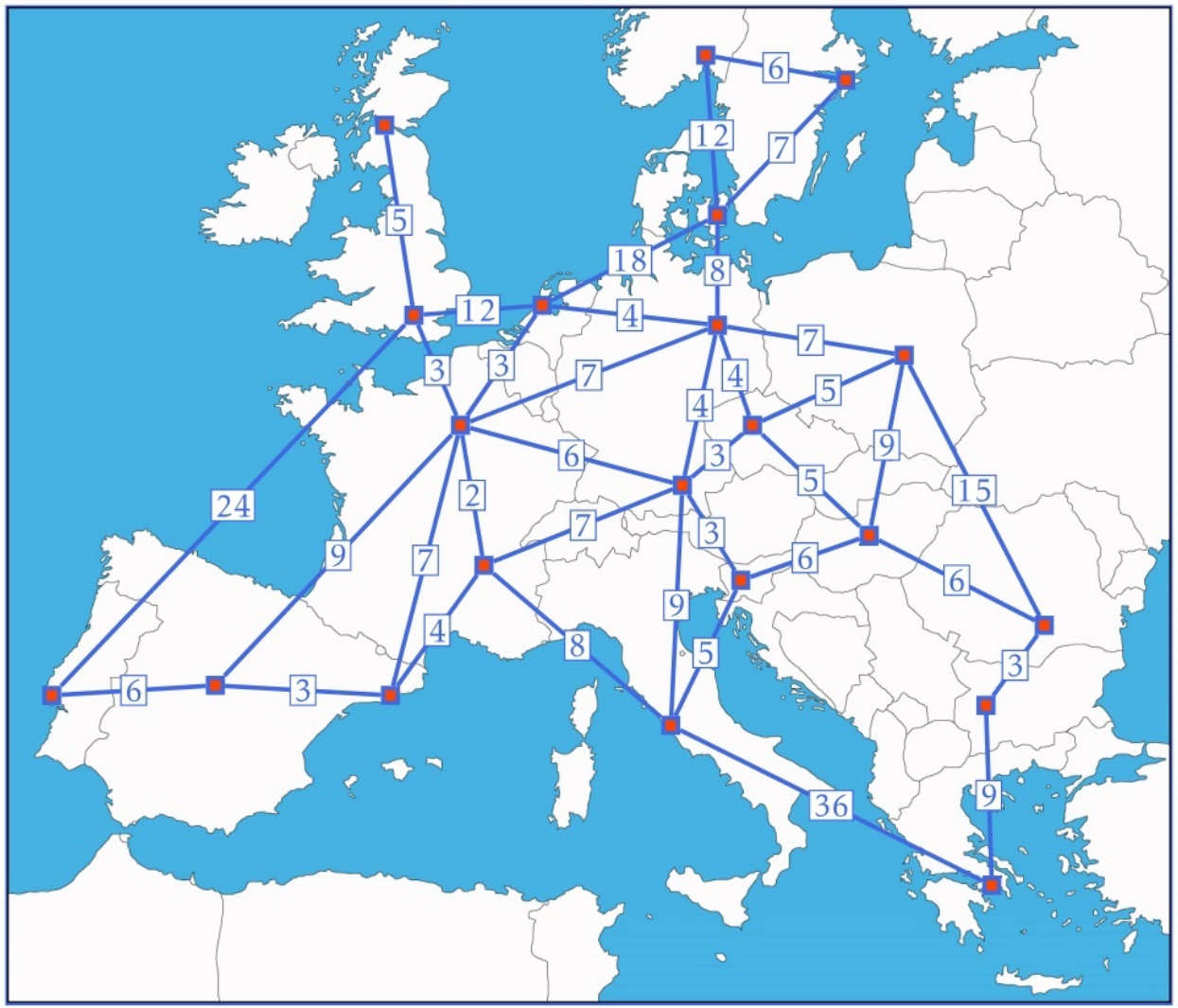
- Si l'on souhaite garder trace des chemins de poids minimum entre s_0 et les différents sommets du graphe, il suffit d'utiliser un tableau c que l'on modifie en même temps que d

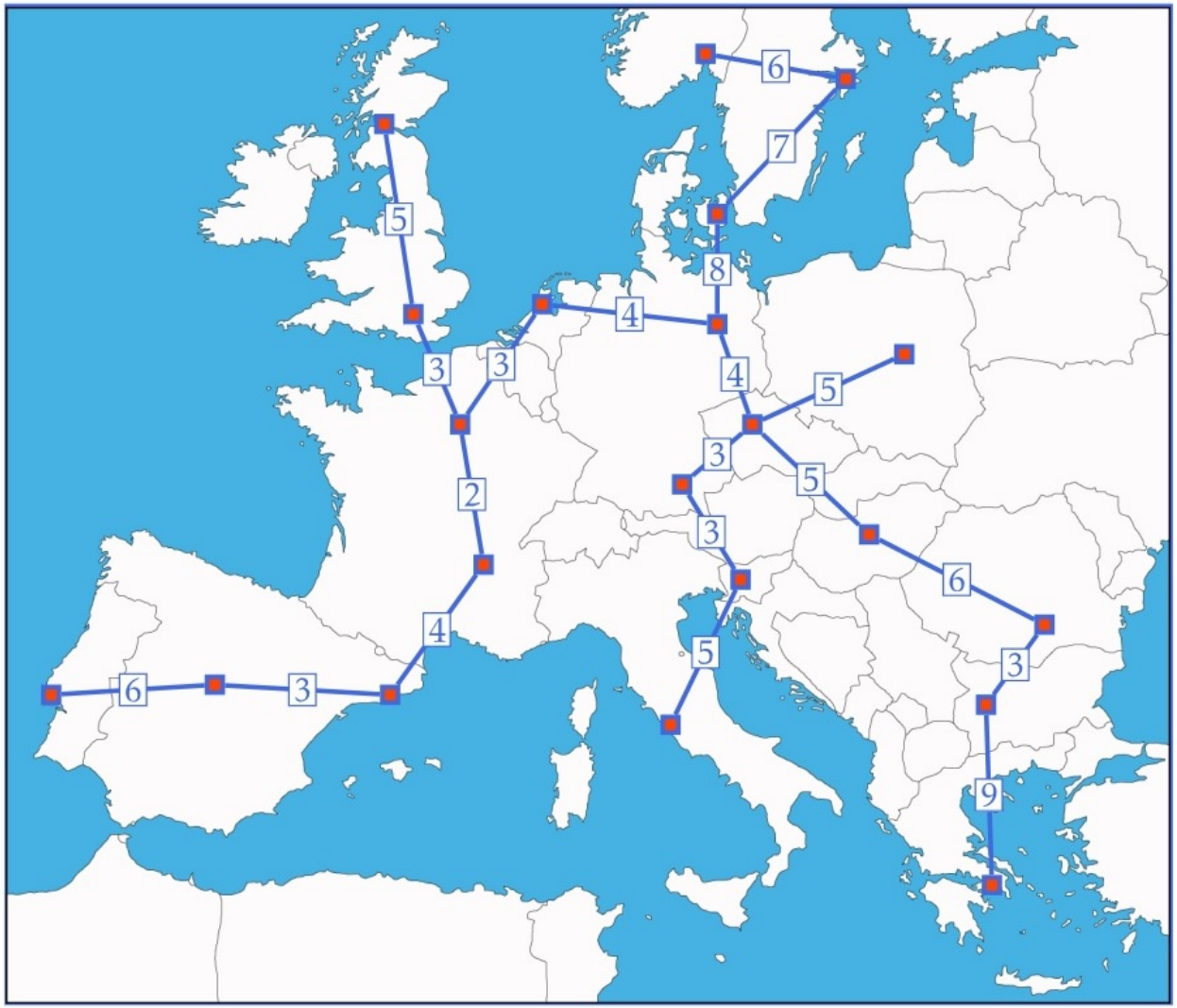
Détermination des chemins de poids minimum

- Si l'on souhaite garder trace des chemins de poids minimum entre s_0 et les différents sommets du graphe, il suffit d'utiliser un tableau c que l'on modifie en même temps que d
- On convient de noter les sommets $0, 1, \ldots n-1$, et lorsque d_j est remplacé par $d_i + f(i,j)$, on mémorise i dans c_j.

Détermination des chemins de poids minimum

- Si l'on souhaite garder trace des chemins de poids minimum entre s_0 et les différents sommets du graphe, il suffit d'utiliser un tableau c que l'on modifie en même temps que d
- On convient de noter les sommets $0, 1, \ldots n-1$, et lorsque d_j est remplacé par $d_i + f(i,j)$, on mémorise i dans c_j.
- Ainsi, à la fin de l'algorithme, c_j contient le sommet précédant le sommet j dans un chemin minimal allant de s_0 à j, ce qui permet de reconstituer un chemin de poids minimum de s_0 vers j une fois l'algorithme terminé.


6
12
7
5
18
8
12
4
7
3
3
7
4
4
5
6
3
9
2
5
15
24
7
3
9
7
6
6
9
4
8
5
3
6
3
36
9


6
7
5
8
4
3
3
4
5
3
5
2
3
6
4
5
3
6
3
9

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe muni d'une pondération $f : \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives.

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe muni d'une pondération $f : \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives.
Un sous-graphe $G' = (S', A')$ de G est dit ***couvrant*** *s'il est également connexe et que $S' = S$.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe muni d'une pondération $f : \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives.
*Un sous-graphe $G' = (S', A')$ de G est dit **couvrant** s'il est également connexe et que $S' = S$.*
*Un sous-graphe couvrant G' de G est dit **minimal** si la somme des poids de ses arêtes est minimale.*

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe muni d'une pondération $f : \to \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives.
*Un sous-graphe $G' = (S', A')$ de G est dit **couvrant** s'il est également connexe et que $S' = S$.*
*Un sous-graphe couvrant G' de G est dit **minimal** si la somme des poids de ses arêtes est minimale.*

Proposition

Proposition Avec les notation précédentes, si la fonction poids est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G et il est fini, donc il existe un sous-graphe couvrant minimal de G.

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G et il est fini, donc il existe un sous-graphe couvrant minimal de G.

Soit G' un sous-graphe couvrant minimal de G.

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G et il est fini, donc il existe un sous-graphe couvrant minimal de G.

Soit G' un sous-graphe couvrant minimal de G.Alors, par définition G' est connexe donc s'il n'était pas un arbre, il contiendrait un cycle.

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G et il est fini, donc il existe un sous-graphe couvrant minimal de G.

Soit G' un sous-graphe couvrant minimal de G.Alors, par définition G' est connexe donc s'il n'était pas un arbre, il contiendrait un cycle. En supprimant une arête de ce cycle, le sous-graphe obtenu serait toujours couvrant mais de poids strictement inférieur, ce qui est absurde.

Proposition

Proposition G possède un sous-graphe couvrant minimal, et tout sous-graphe couvrant minimal de G est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe acyclique)

Démonstration : L'ensemble des sous-graphes couvrants de G est non vide car il contient G et il est fini, donc il existe un sous-graphe couvrant minimal de G.

Soit G' un sous-graphe couvrant minimal de G.Alors, par définition G' est connexe donc s'il n'était pas un arbre, il contiendrait un cycle. En supprimant une arête de ce cycle, le sous-graphe obtenu serait toujours couvrant mais de poids strictement inférieur, ce qui est absurde. G' est donc un arbre ♯

Principe

- On choisit un sommet s_0 arbitrairement

Principe

- On choisit un sommet s_0 arbitrairement
- On ajoute les arêtes une à une en choisissant à chaque étape une arête qui sort de l'arbre déjà construit et qui est de poids minimum

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**
Soit $(a, b) \in A$ tel que $(a, b) \in S' \times (S \setminus S')$ et $f(a, b)$ est minimal

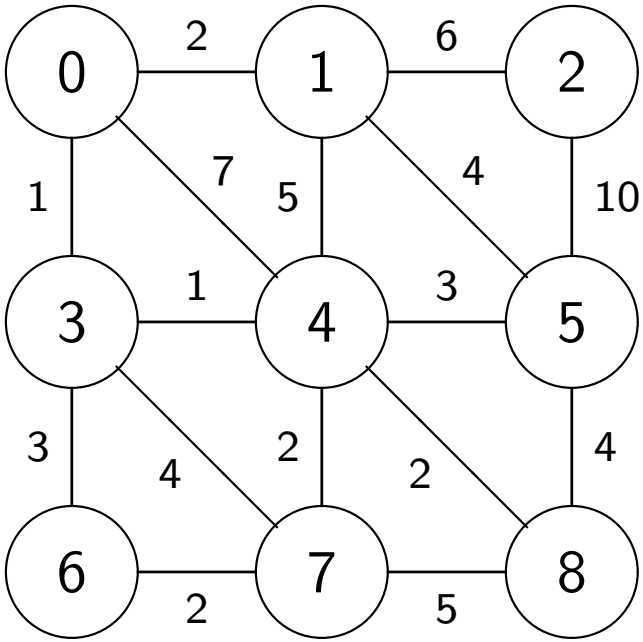
function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**
Soit $(a, b) \in A$ tel que $(a, b) \in S' \times (S \setminus S')$ et $f(a, b)$ est minimal
$S' \leftarrow S' \cup \{b\}$

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**
Soit $(a, b) \in A$ tel que $(a, b) \in S' \times (S \setminus S')$ et $f(a, b)$ est minimal
$S' \leftarrow S' \cup \{b\}$
$A' \leftarrow A' \cup \{(a, b)\}$

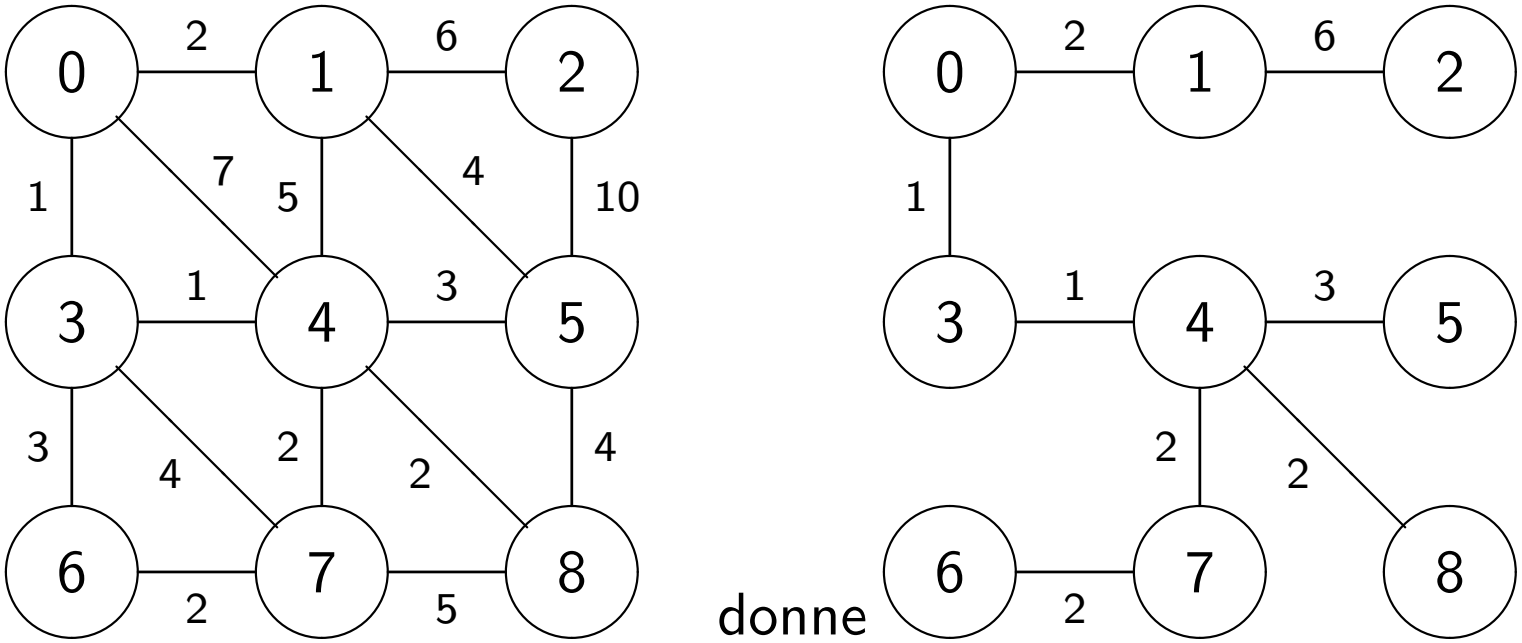
function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**
Soit $(a, b) \in A$ tel que $(a, b) \in S' \times (S \setminus S')$ et $f(a, b)$ est minimal
$S' \leftarrow S' \cup \{b\}$
$A' \leftarrow A' \cup \{(a, b)\}$
return (S', A')

function PRIM(graphe connexe : $G = (S, A)$)
$S' \leftarrow \{s_0\}$ (* un sommet choisi arbitrairement *)
$A' = \emptyset$
while $S' \neq S$ **do**
Soit $(a, b) \in A$ tel que $(a, b) \in S' \times (S \setminus S')$ et $f(a, b)$ est minimal
$S' \leftarrow S' \cup \{b\}$
$A' \leftarrow A' \cup \{(a, b)\}$
return (S', A')

Exemple : Pour le graphe ci-dessous, on a représenté l'arbre couvrant minimal obtenu en démarrant avec le sommet 0.



Exemple : Pour le graphe ci-dessous, on a représenté l'arbre couvrant minimal obtenu en démarrant avec le sommet 0.



Proposition

L'algorithme de Prim calcule un arbre couvrant minimal.

Proposition

L'algorithme de Prim *calcule un arbre couvrant minimal.*

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant.

Proposition

L'algorithme de Prim *calcule un arbre couvrant minimal.*

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant. De plus, il possède par construction n sommets et $n-1$ arêtes donc il s'agit bien d'un arbre.

Proposition

L'algorithme de PRIM *calcule un arbre couvrant minimal.*

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant. De plus, il possède par construction n sommets et $n-1$ arêtes donc il s'agit bien d'un arbre.Il reste à montrer qu'il est bien de poids minimal.

Proposition

L'algorithme de PRIM calcule un arbre couvrant minimal.

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant. De plus, il possède par construction n sommets et $n-1$ arêtes donc il s'agit bien d'un arbre.Il reste à montrer qu'il est bien de poids minimal.On montre par récurrence sur $|S'|$ qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un arbre couvrant de poids minimal dont (S', A') est un sous-graphe, ce qui montrera le résultat souhaité.

Proposition

L'algorithme de PRIM calcule un arbre couvrant minimal.

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant. De plus, il possède par construction n sommets et $n-1$ arêtes donc il s'agit bien d'un arbre.Il reste à montrer qu'il est bien de poids minimal.On montre par récurrence sur $|S'|$ qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un arbre couvrant de poids minimal dont (S', A') est un sous-graphe, ce qui montrera le résultat souhaité.

- Le résultat est vrai lorsque $|S'| = 1$ car alors $|A'| = \emptyset$.

Proposition

L'algorithme de PRIM calcule un arbre couvrant minimal.

Démonstration : Il est clair que le graphe construit par l'algorithme précédent est un graphe connexe couvrant. De plus, il possède par construction n sommets et $n-1$ arêtes donc il s'agit bien d'un arbre.Il reste à montrer qu'il est bien de poids minimal.On montre par récurrence sur $|S'|$ qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un arbre couvrant de poids minimal dont (S', A') est un sous-graphe, ce qui montrera le résultat souhaité.

- Le résultat est vrai lorsque $|S'| = 1$ car alors $|A'| = \emptyset$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai quand $|S'| = k$: il existe donc un arbre couvrant minimal T dont (S', A') est un sous-graphe. Notons (a, b) l'arête que l'algorithme ajoute à A'.

- Le résultat est vrai lorsque $|S'| = 1$ car alors $|A'| = \emptyset$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai quand $|S'| = k$: il existe donc un arbre couvrant minimal T dont (S', A') est un sous-graphe. Notons (a, b) l'arête que l'algorithme ajoute à A'.

  Si (a, b) appartient à T, le résultat est acquis. Dans le cas contraire, ajoutons cette arête à T. Cet ajout a pour effet de créer un cycle. Ce cycle parcourt à la fois des éléments de S' (et, parmi eux a) et des éléments de $S \setminus S'$ (et parmi eux b). Il existe donc nécessairement une autre arête $(a', b') \neq (a, b)$ de ce cycle telle que $a' \in S'$ et $b' \in S \setminus S'$ Considérons alors l'arbre T' obtenu en supprimant l'arête (a', b'). Il s'agit à nouveau d'un arbre couvrant et il est de poids minimal car par choix de (a, b) on a $f(a, b) \leqslant f(a', b')$ ♯

Étude de la complexité

Étude de la complexité

Si p est le nombre d'arêtes du graphe G, la recherche naïve de l'arête de poids minimal (a, b) est un $O(p)$ et le coût total un $O(np)$.

Étude de la complexité

Si p est le nombre d'arêtes du graphe G, la recherche naïve de l'arête de poids minimal (a, b) est un $O(p)$ et le coût total un $O(np)$.On peut néanmoins faire mieux en procédant à un prétraitement des sommets consistant à déterminer pour chacun d'eux l'arête incidente de poids minimal qui le relie à un sommet de S'. Dès lors, le coût de la recherche de l'arête de poids minimal devient un $O(n)$, et une fois le nouveau sommet ajouté à, S', il suffit de mettre à jour les voisins de ce dernier. Sachant que le coût du pré-traitement est un $O(p) = O(n^2$, le coût total de l'algorithme est un $O(n^2)$.

Étude de la complexité

Si p est le nombre d'arêtes du graphe G, la recherche naïve de l'arête de poids minimal (a, b) est un $O(p)$ et le coût total un $O(np)$.On peut néanmoins faire mieux en procédant à un prétraitement des sommets consistant à déterminer pour chacun d'eux l'arête incidente de poids minimal qui le relie à un sommet de S'. Dès lors, le coût de la recherche de l'arête de poids minimal devient un $O(n)$, et une fois le nouveau sommet ajouté à, S', il suffit de mettre à jour les voisins de ce dernier. Sachant que le coût du pré-traitement est un $O(p) = O(n^2$, le coût total de l'algorithme est un $O(n^2)$.

En outre, on peut montrer que l'utilisation d'un tas pour stocker les différents sommets n'appartenant pas à S' permet de réduire le coût, qui devient alors un $O(p \log n)$.

Idée maintenir à chaque étape un graphe partiel acyclique (autrement dit une forêt)

Idée maintenir à chaque étape un graphe partiel acyclique (autrement dit une forêt) jusqu'à obtenir une unique composante connexe (donc un arbre)

Idée maintenir à chaque étape un graphe partiel acyclique (autrement dit une forêt) jusqu'à obtenir une unique composante connexe (donc un arbre)

Principe

- On part du graphe comportant tous les sommets de $G = (S, A)$ et aucune arête

Idée maintenir à chaque étape un graphe partiel acyclique (autrement dit une forêt) jusqu'à obtenir une unique composante connexe (donc un arbre)

Principe

- On part du graphe comportant tous les sommets de $G = (S, A)$ et aucune arête
- Tant que c'est possible, on ajoute une arête de poids minimum permettant de réunir deux composantes connexes distinctes

Algorithme
function Kruskal(graphe : $G = (S, A)$)

Algorithme

function KRUSKAL(graphe : $G = (S, A)$)

$A' = \emptyset$

$A_t = \text{tri\_croissant}(A)$

Algorithme

function KRUSKAL(graphe : $G = (S, A)$)

$A' = \emptyset$

$A_t = \text{tri\_croissant}(A)$

for $(a, b) \in A_t$ **do**

if $A' \cup \{(a, b)\}$ est acyclique **then**

$A' \leftarrow A' \cup \{(a, b)\}$

Algorithme

function KRUSKAL(graphe : $G = (S, A)$)

$A' = \emptyset$

$A_t = \text{tri\_croissant}(A)$

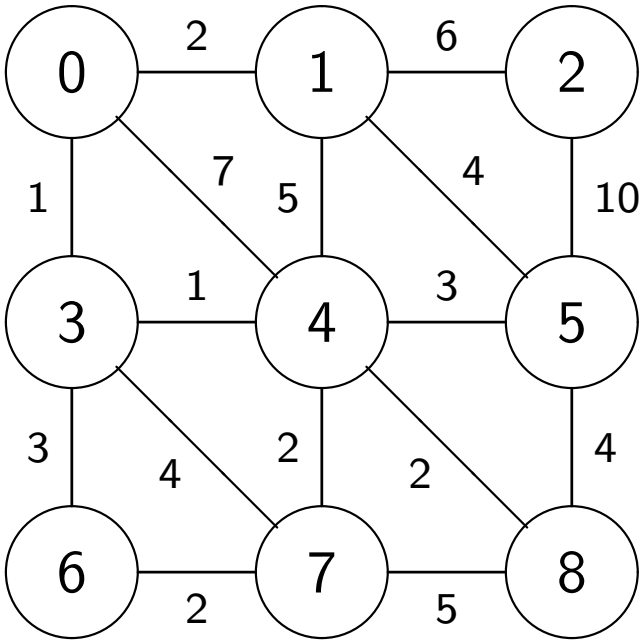
for $(a, b) \in A_t$ **do**

if $A' \cup \{(a, b)\}$ est acyclique **then**

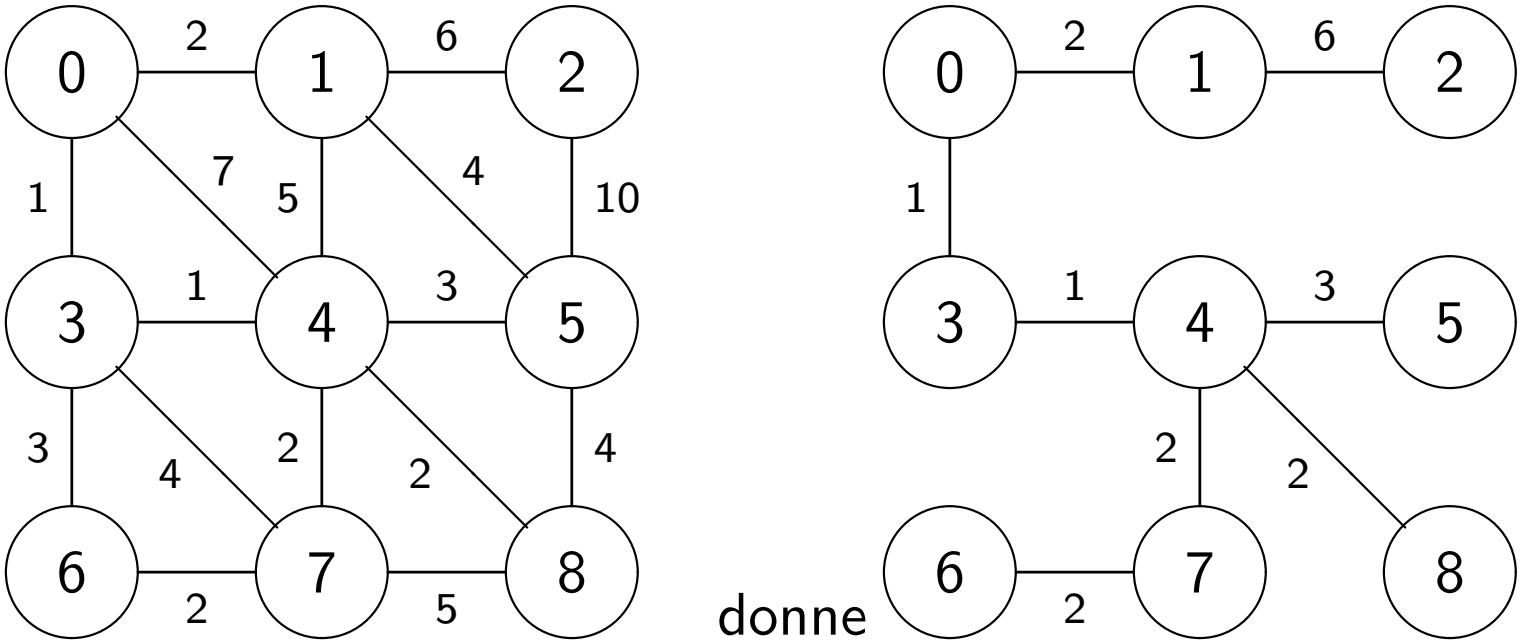
$A' \leftarrow A' \cup \{(a, b)\}$

return (S, A')

Exemple :



Exemple :



Remarques :

- Si on applique l'algorithme de Kruskal à un graphe G non connexe,

Remarques :

- Si on applique l'algorithme de KRUSKAL à un graphe G non connexe,il fournira une forêt couvrante de poids minimal de G,

Remarques :

- Si on applique l'algorithme de KRUSKAL à un graphe G non connexe,il fournira une forêt couvrante de poids minimal de G,c'est-à-dire une forêt dont chaque composante connexe est un arbre couvrant minimal d'une des composantes connexes de G
- Si on applique l'algorithme de KRUSKAL à un graphe G dont on sait qu'il est connexe,

Remarques :

- Si on applique l'algorithme de KRUSKAL à un graphe G non connexe,il fournira une forêt couvrante de poids minimal de G,c'est-à-dire une forêt dont chaque composante connexe est un arbre couvrant minimal d'une des composantes connexes de G
- Si on applique l'algorithme de KRUSKAL à un graphe G dont on sait qu'il est connexe,on pourra s'arrêter après avoir ajouté $|S| - 1$ arêtes pour obtenir un arbre couvrant minimal.

Lemme Toutes les forêts couvrantes d'un graphe G ont le même nombre d'arêtes

Lemme Toutes les forêts couvrantes d'un graphe G ont le même nombre d'arêtes

Démonstration : Notons $G = (S, A)$ et $G_1 = (S_1, A_1), \ldots G_p = (S_p, A_p)$ les composantes connexes de G.

Lemme Toutes les forêts couvrantes d'un graphe G ont le même nombre d'arêtes

Démonstration : Notons $G = (S, A)$ et $G_1 = (S_1, A_1), \ldots G_p = (S_p, A_p)$ les composantes connexes de G.Puisqu'un arbre a un nombre d'arêtes égal à son nombre de sommets -1

Lemme Toutes les forêts couvrantes d'un graphe G ont le même nombre d'arêtes

Démonstration : Notons $G = (S, A)$ et $G_1 = (S_1, A_1), \ldots G_p = (S_p, A_p)$ les composantes connexes de G.Puisqu'un arbre a un nombre d'arêtes égal à son nombre de sommets -1, le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante de G est égale à $\sum_{i=1}^{p} (|S_i| - 1) = |S| - p$ indépendant de la forêt couvrante considérée.♯

Lemme Toutes les forêts couvrantes d'un graphe G ont le même nombre d'arêtes

Démonstration : Notons $G = (S, A)$ et $G_1 = (S_1, A_1), \ldots G_p = (S_p, A_p)$ les composantes connexes de G.Puisqu'un arbre a un nombre d'arêtes égal à son nombre de sommets -1, le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante de G est égale à $\sum_{i=1}^{p} (|S_i| - 1) = |S| - p$ indépendant de la forêt couvrante considérée.♯

Théorème Appliqué à un graphe G l'algorithme de KRUSKAL détermine une forêt couvrante de poids minimal de G.

Le graphe construit par l'algorithme de Kruskal est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.

Le graphe construit par l'algorithme de Kruskal est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de Kruskal, rangées par poids croissants,

Le graphe construit par l'algorithme de KRUSKAL est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de KRUSKAL, rangées par poids croissants,et soit une autre forêt couvrante $F = (S, A'')$ d'arêtes $(a''_1, \ldots a''_k)$.

Le graphe construit par l'algorithme de Kruskal est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de Kruskal, rangées par poids croissants,et soit une autre forêt couvrante $F = (S, A'')$ d'arêtes $(a''_1, \ldots a''_k)$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, k]\!],\ f(a'_i) \leqslant f(a''_i)$

Le graphe construit par l'algorithme de KRUSKAL est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de KRUSKAL, rangées par poids croissants,et soit une autre forêt couvrante $F = (S, A'')$ d'arêtes $(a''_1, \ldots a''_k)$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, k]\!]$, $f(a'_i) \leqslant f(a''_i)$
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f(a'_i) > f(a''_i)$. Considérons le graphe $G' = (S, E)$ avec $E = \{a \in A \,|\, f(a) \leqslant f(a''_i)\}$.

Le graphe construit par l'algorithme de Kruskal est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de Kruskal, rangées par poids croissants,et soit une autre forêt couvrante $F = (S, A'')$ d'arêtes $(a''_1, \ldots a''_k)$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, k]\!]$, $f(a'_i) \leqslant f(a''_i)$
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f(a'_i) > f(a''_i)$. Considérons le graphe $G' = (S, E)$ avec $E = \{a \in A \mid f(a) \leqslant f(a''_i)\}$.
Appliqué à G', l'algorithme de Kruskal se déroule comme sur G et retourne un ensemble d'arêtes inclus dans $\{a'_1, \ldots, a'_{i-1}\}$, donc une forêt couvrante de G' comportant au plus $i - 1$ arêtes.

Le graphe construit par l'algorithme de KRUSKAL est bien une forêt couvrante puisqu'on ajoute des arêtes sans jamais créer de cycle.
Il reste à prouver que cette forêt est de poids minimal. Pour cela, notons $A' = (a'_1, \ldots, a'_k)$ les arêtes choisies par l'algorithme de KRUSKAL, rangées par poids croissants,et soit une autre forêt couvrante $F = (S, A'')$ d'arêtes $(a''_1, \ldots a''_k)$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, k]\!]$, $f(a'_i) \leqslant f(a''_i)$
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f(a'_i) > f(a''_i)$. Considérons le graphe $G' = (S, E)$ avec $E = \{a \in A \,|\, f(a) \leqslant f(a''_i)\}$.
Appliqué à G', l'algorithme de KRUSKAL se déroule comme sur G et retourne un ensemble d'arêtes inclus dans $\{a'_1, \ldots, a'_{i-1}\}$, donc une forêt couvrante de G' comportant au plus $i - 1$ arêtes. Or la forêt, $F' = (S, E')$ avec $E' = (a''_1, \ldots, a''_i)$ est une forêt couvrante de G' qui comporte i arêtes, contradiction ♯

Complexité.

Complexité.

En utilisant un tas pour trier les arêtes par poids croissants et les énumérer,

Complexité.

En utilisant un tas pour trier les arêtes par poids croissants et les énumérer,puis une structure de données (appelée Union-Find) permettant de gérer efficacement une partition d'objets (ici l'évolution des composantes connexes),

Complexité.

En utilisant un tas pour trier les arêtes par poids croissants et les énumérer,puis une structure de données (appelée Union-Find) permettant de gérer efficacement une partition d'objets (ici l'évolution des composantes connexes),on montre qu'on a une complexité pour l'algorithme de Kruskal en $O(n \log p)$.