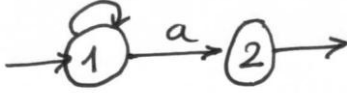


Exercice 1.

1. $w = a$ mot de longueur $n = 1$ a, b

a). Représentation de A_w : 

• Montrons que $L(A_w)$ est l'ensemble des mots se terminant par a .
Si $m = a_1 \dots a_k$ est un mot se terminant par a (ie $a_k = a$) il est reconnu par A_w grâce à la suite de transitions :

$(1, a_1, 1)$
 $(1, a_2, 1)$
 $\vdots$
 $(1, a_{k-1}, 1)$
 $(1, a, 2)$

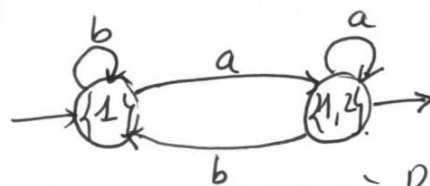
Réciproquement si $m \in L(A_w)$ alors m n'est pas le mot vide (car l'état initial de A_w n'est pas final) donc $m = a_1 \dots a_k$ et la dernière transition pour lire m est nécessairement du type $(q, a, 2)$; or il y a une unique transition se terminant par 2 qui est $(1, a, 2)$ donc $a_k = a$ et m se termine par a .

b) $L(A_a)$ est le langage correspondant à l'expression rationnelle $(ab)^*a$
ou encore Σ^*a

c) i) B est déterministe car il compte un seul état initial : 1 et que $\forall q \in Q = \{1, 2\}, \forall e \in \Sigma = \{a, b\}$, il existe au plus une transition partant de q et d'étiquette e (en fait il en existe une exactement ce qui fait que B est également complet).

ii) Montrons que B est l'automate déterministe équivalent à A_a obtenu en appliquant l'algorithme de déterminisation ce qui implique que $L(B) = L(A_a)$

	a	b
$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$



clairement équivalent à B en renommant les états 1 et 2

2. $w = a^n = a_1 a_2 \dots a_n$ avec $\forall i \quad a_i = a$

a) Représentation de A_w :



Le langage $L(A_w)$ est le langage constitué des mots sur l'alphabet Σ se terminant par w .

b) On applique l'algorithme de déterminisation à A_w .

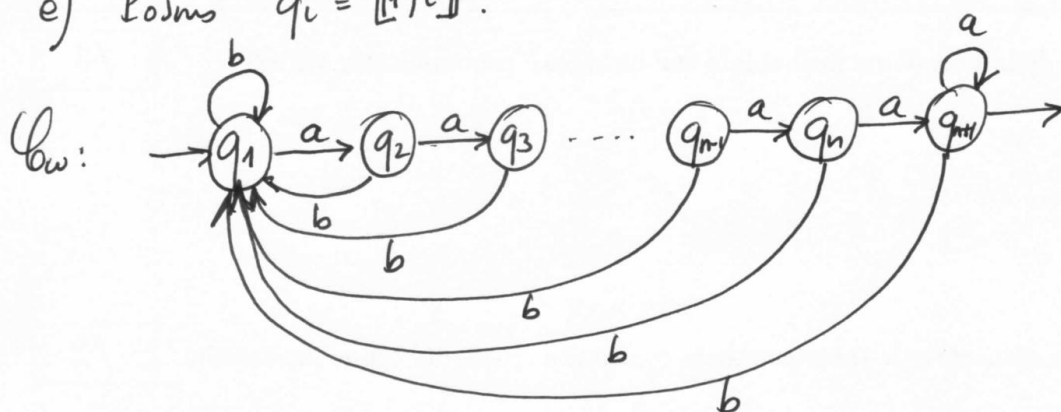
	a	b
$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1\}$
$\vdots$		
$\{1, 2, \dots, k\}$	$\{1, 2, \dots, k+1\}$	$\{1\}$
$\vdots$		
$\{1, 2, \dots, n\}$	$\{1, 2, \dots, n+1\}$	$\{1\}$
$\{1, 2, \dots, n+1\}$	$\{1, 2, \dots, n+1\}$	$\{1\}$

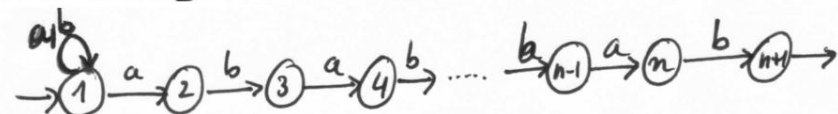
les états de $\mathcal{B}_w$ sont donc
 $\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, k\}, \dots, \{1, 2, \dots, n+1\}$
 et les transitions de $\mathcal{B}_w$ sont donc
 les $([1, k], a, [1, k+1])$ pour $k \in [1, n]$
 les $([1, k], b, \{1\})$ pour $k \in [1, n+1]$
 et $([1, n+1], a, [1, n+1])$
 (il y en a $2n+2$ en tout)

c) L'état initial de $\mathcal{B}_w$ est $\{1\}$.

d) $\mathcal{B}_w$ a un seul état final qui est $\{1, 2, \dots, n+1\} = [1, n+1]$.

e) Posons $q_i = [1, i]$.



3. $w = (ab)^n$ d'où A_w : 

$L(A_w)$ est à nouveau l'ensemble des mots se terminant par w .

Notons $\mathcal{D}$ l'automate déterministe équivalent à $\mathcal{A}_w$ obtenu par l'algorithme de détermination.

On trouve que ses états sont $\{1\}$ (état initial).

et $\{1,2\}, \{1,2,4\}, \dots, \{1,2,4, \dots, 2k\}, \dots, \{1,2,4, \dots, n\}$.

Il y a un seul état final qui est $\{1,3,5, \dots, n+1\}$.

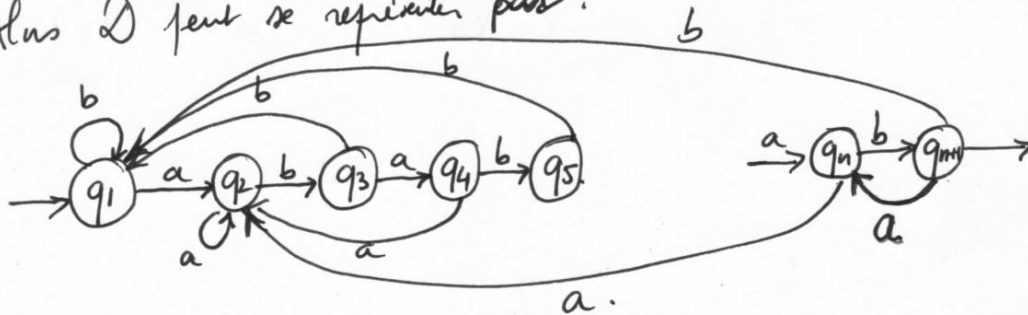
Les transitions sont $(\{1\}, a, \{1,2\}), (\{1\}, b, \{1\})$.

et pour $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ $(\{1,2, \dots, 2k\}, a, \{1,2\}), (\{1,2, \dots, 2k\}, b, \{1,3,5, \dots, 2k+1\})$

et $(\{1,3, \dots, 2k-1\}, a, \{1,2,4, \dots, 2k\}), (\{1,3, \dots, 2k-1\}, b, \{1\})$.

Posons si $1 \leq i \leq n+1$ $q_i = \begin{cases} \{1,3,5, \dots, i\} & \text{si } i \text{ impair} \\ \{1,2,4, \dots, i\} & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$

Alors $\mathcal{D}$ peut se représenter par :



Exercice 2.

1. a) $w \in (uv)^{-1}L \Leftrightarrow uvw \in L$

$w \in v^{-1}(u^{-1}L) \Leftrightarrow vw \in u^{-1}L \Leftrightarrow uvw \in L$

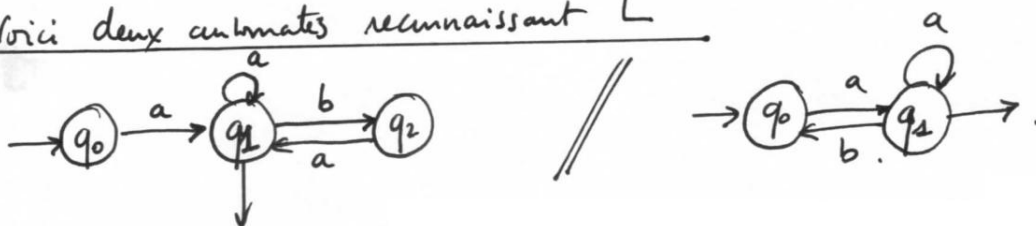
conclusion : $w \in (uv)^{-1}L \Leftrightarrow w \in v^{-1}(u^{-1}L)$ autrement dit $(uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)$

b) $\varepsilon \in v^{-1}L \Leftrightarrow u\varepsilon \in L \Leftrightarrow u \in L$

Donc si $u \in L$ et $v \notin L$ $u^{-1}L \neq v^{-1}L$ puisque $\varepsilon \in v^{-1}L$ et $\varepsilon \notin u^{-1}L$

2. Remarquons que L est le langage des mots commençant par "a" et finissant par "b" est suivi d'un "a" ou encore des mots commençant par "a" et ne contenant pas le facteur "bb".

a) Voici deux automates reconnaissant L



$$b) \quad \varepsilon^{-1}L = L \quad a^{-1}L = \{v \in \Sigma^* / av \in L\} = (ba+a)^* \quad b^{-1}L = \{v \in \Sigma^* / bv \in L\} = \emptyset$$

$$(aa)^{-1}L = a^{-1}(ba+a)^* = \{v \in \Sigma^* / av \in (ba+a)^*\} = (ba+a)^* \quad (ab)^{-1}L = \{v \in \Sigma^* / abv \in a(ba+a)^*\} = a(ba+a)^* = L$$

$$(ba)^{-1}L = a^{-1}\emptyset = \emptyset \quad (bb)^{-1}L = b^{-1}\emptyset = \emptyset$$

c) On montrerait par récurrence sur la longueur de u que $\forall u \in \Sigma^*, u^{-1}L \in \{\emptyset, (ba+a)^*, L\}$.
 Comme $\emptyset, (ba+a)^*, L$ sont trois langages distincts, L possède exactement 3 résiduels
qui sont $\emptyset, (ba+a)^*$ et L .

3 a) Montrons par récurrence $H(n)$: $\forall u \in \Sigma^*$ de longueur n , $\forall q \in Q$
 $\delta^*(q, u) = u^{-1}q$.

$H(0)$ est vraie car si $|u|=0$ $u=\varepsilon$ et $\delta^*(q, \varepsilon) = q$

$$\text{or } \varepsilon^{-1}q = \{v \in \Sigma^* / \varepsilon v = v \in q\} = q$$

Supposons $H(n)$ vraie et soit $u \in \Sigma^*$ de longueur $n+1$. Alors $u = xm$
 où $|m|=n$ et $x \in \Sigma$.

$$\text{on a alors } \delta^*(q, u) = \delta^*(\delta(q, x), m) = \delta^*(x^{-1}q, m) \underset{H(n)}{=} m^{-1}(x^{-1}q) \underset{1.a)}{=} (xm)^{-1}q$$

on a bien $\delta^*(q, u) = u^{-1}q$ ce qui établit $H(n+1)$

b) Choisissons $i_0 = L$ qui est bien un résiduel de L car par ex $L = \varepsilon^{-1}L$

Remarquons d'autre part que si $v \in \Sigma^*$, $v^{-1}L \in F \Leftrightarrow v \in L$

En effet, par définition de F , si $v \in L$, $v^{-1}L \in F$

Réciproquement si $v \notin L$, d'après 1.b) il n'existe pas $u \in L$ tq $u^{-1}L = v^{-1}L$ donc $v \notin F$.

Montrons que le langage $\mathcal{L}(A)$ reconnu par l'automate A est bien égal à L .

$$\text{Soit } u \in \Sigma^*, \quad u \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow \delta^*(L, u) \in F$$

$$\Leftrightarrow u^{-1}L \in F$$

$\uparrow$
Q.3.a)

$$\Leftrightarrow u \in L$$

$\Leftrightarrow$
19 précédente

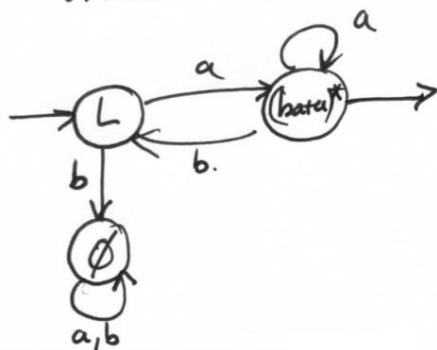
on a donc $\mathcal{L}(A) = L$

Concl: On a montré que tout langage L possédant un nombre fini de résiduels
 est le langage reconnu par un automate fini déterministe et complet donc est
 un langage rationnel.

c) Exemple: Ici $Q = \{\emptyset, (bata)^*, a(bata)^* = L\}$
 $F = \{(bata)^*\}$ car avec 2.b) on monte facilement par $\forall u \in L$,
 $u^{-1}L = (bata)^*$

les transitions sont connues grâce à 2.b).

on obtient



4. a) Si $v \in \Sigma^*$, $v \in u^{-1}L \Leftrightarrow uv \in L$

et $v \in \mathcal{L}_{q_u} \Leftrightarrow \delta'^*(q_u, v) \in F'$

or comme $q_u = \delta'^*(i', u)$, on a $\delta'^*(q_u, v) = \delta'^*(i', uv)$

donc $v \in \mathcal{L}_{q_u} \Leftrightarrow \delta'^*(i', uv) \in F' \Leftrightarrow uv \in L = \mathcal{L}(B)$.

on a donc : $u^{-1}L = \mathcal{L}_{q_u}$

b) D'après a) l'ens. des résiduels de $L = \{u^{-1}L, u \in \Sigma^*\}$ est inclus dans $\{\mathcal{L}_{q'}, q' \in Q'\}$ qui est fini (puisque Q' est fini) de cardinal $\leq \text{card } Q'$. Donc l'ensemble des résiduels de L est fini de cardinal $p \leq \text{card } Q'$. En particulier, tout automate complet déterministe reconnaissant L doit posséder au - autant d'états que le nombre de résiduels de L .