Énoncé. D.3./D.M.2.

À rendre le mercredi 3 février.

Exercice 1

On considère l'alphabet à deux lettres : $\Sigma = \{a, b\}$.

Dans toute la suite, on fixe ω un mot non vide sur l'alphabet Σ ; on note n la longueur de ω (c'est à dire son nombre de lettres) et $a_1, \dots, a_n$ ses n lettres lues de gauche à droite, c'est à dire que $\omega = a_1 a_2 \dots a_n$.

Soit $\mathcal{A}_\omega = (Q, \Delta, 1, \{n+1\})$ un automate sur l'alphabet Σ défini par :

- Q, l'ensemble des états de $\mathcal{A}_\omega$ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$,
- Δ, l'ensemble des transitions de $\mathcal{A}_\omega$ ($\Delta \subset Q \times \Sigma \times Q$), est l'ensemble : $\big\{(1, a, 1), (1, b, 1), (i, a_i, i+1), \forall i \in \{1, \dots, n\}\big\}$;
- 1 est l'état initial de $\mathcal{A}_\omega$,
- $n+1$ est l'unique état final de $\mathcal{A}_\omega$.

On note $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\omega)$ le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}_\omega$.

1. On suppose que ω est la lettre a, donc $n = 1$.

a) Représenter l'automate $\mathcal{A}_a$ et justifier que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_a)$ est le langage des mots se terminant par un a.

b) Donner une expression rationnelle de $\mathcal{L}(\mathcal{A}_a)$.

c) On considère l'automate $\mathcal{B}$ représenté sur la figure 1.

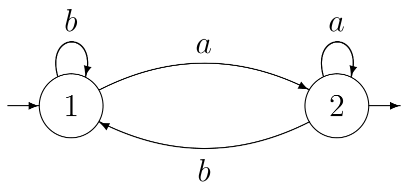

Figure 1 : Automate $\mathcal{B}$

Montrer que l'automate $\mathcal{B}$ est déterministe et que le langage reconnu par l'automate $\mathcal{B}$ est égal à $\mathcal{L}(\mathcal{A}_a)$.

2. On suppose ici que $n > 1$ et que les lettres de ω sont toutes égales à a ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = a$).

a) Représenter l'automate $\mathcal{A}_\omega$ et décrire le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\omega)$ dans ce cas.
On se propose de déterminiser l'automate $\mathcal{A}_\omega$: on applique à $\mathcal{A}_\omega$ l'algorithme de déterminisation et on note $\mathcal{C}_\omega$ l'automate ainsi obtenu.

b) Montrer que les états de $\mathcal{C}_\omega$ sont :

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, \dots, i-1, i\}, \dots, \{1, 2, \dots n\}, \{1, 2, \dots, n, n+1\},$$

et indiquer toutes les transitions de $\mathcal{C}_\omega$.

c) Quel est l'état initial de $\mathcal{C}_\omega$?

d) Quels sont les états finaux de $\mathcal{C}_\omega$?

e) Représenter $\mathcal{C}_\omega$.

3. On suppose que n est pair et que $a_i = a$ lorsque i est impair et $a_i = b$ lorsque i est pair, c'est à dire que $\omega = abab \dots ab$. Construire un automate déterministe qui reconnaît l'ensemble des mots finis sur l'alphabet Σ qui se terminent par ω.

Exercice 2 : Résiduels d'un langage

Soit Σ un alphabet fini non vide. On note ε le mot vide. Si $L \subset \Sigma^*$ et si $u \in \Sigma^*$, on pose :

$$u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$$

Un tel ensemble est un *résiduel* du langage L. On se propose de montrer qu'un langage est rationnel si et seulement si celui-ci n'a qu'un nombre fini de résiduels et, si c'est le cas, de construire un automate déterministe le reconnaissant ayant un nombre minimal d'états.

1. Soient $(u, v) \in (\Sigma^*)^2$ et $L \subset \Sigma^*$.

a) Comparer $(uv)^{-1}L$ et $v^{-1}(u^{-1}L)$ en justifiant votre réponse.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\varepsilon \in u^{-1}L$ et en déduire que si $u \in L$ et $v \notin L$, alors $u^{-1}L \neq v^{-1}L$.

2. Dans cette question, on suppose que $\Sigma = \{a, b\}$ et on considère le langage $L = a(ba + a)^*$.

a) Représenter graphiquement un automate déterministe reconnaissant le langage L.

b) Calculer $u^{-1}L$ pour $u = \varepsilon$, a, b, aa, ab, ba, bb.

c) Décrire sans justifications les différents résiduels de L.

3. On revient au cas général et on se donne un langage $L \subset \Sigma^*$. On suppose que l'ensemble des résiduels de L est fini c'est-à-dire que l'ensemble $\{u^{-1}L,\ u \in \Sigma^*\}$ est fini.
On considère alors un automate $\mathcal{A} = (Q, \delta, i_0, F)$ où Q est l'ensemble fini des résiduels de L, $F = \{u^{-1}L,\ u \in L\}$ et où la fonction de transition δ est définie par :

$$\forall\, u \in \Sigma^*,\ \forall\, a \in \Sigma,\ \delta(u^{-1}L, a) = (ua)^{-1}L$$

On note δ^* la fonction de transition étendue aux mots définie par :

$$\forall\, q \in Q,\ \delta^*(q, \varepsilon) = q \quad \text{et} \quad \forall (x, m) \in \Sigma \times \Sigma^*,\ \delta^*(q, xm) = \delta^*(\delta(q, x), m)$$

a) Montrer que $\forall\, u \in \Sigma^*, \forall\, q \in Q,\ \delta^*(q, u) = u^{-1}q$.

b) Montrer qu'en choisissant judicieusement l'état initial i_0, l'automate ainsi construit reconnaît exactement L et conclure.

c) Représenter graphiquement l'automate obtenu si L est le langage de la question 2.

4. Réciproquement, on se donne un langage rationnel L et un automate déterministe complet $\mathcal{B} = (Q', \delta', i', F')$ reconnaissant L. Si $q \in Q'$, le langage reconnu par q, noté $\mathcal{L}_q$ est, par définition, le langage reconnu par l'automate (Q', δ', q, F').

a) Soit $u \in \Sigma^*$. On note q_u l'état de l'automate $\mathcal{B}$ obtenu après lecture du mot u. Comparer, en justifiant, $u^{-1}L$ et $\mathcal{L}_{q_u}$.

b) En déduire que L n'a qu'un nombre fini de résiduels et que le nombre d'états de $\mathcal{B}$ est supérieur ou égal au nombre de résiduels de L.