LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Nous nous intéressons dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés de la logique propositionnelle tri-valuée. En plus des deux valeurs classiques VRAI ($\top$) et FAUX ($\bot$) que peut prendre une expression, la logique propositionnelle tri-valuée introduit une troisième valeur INDETERMINE (?) .
$\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules construites sur $\mathcal{V}$. Pour $A, B \in \mathcal{V}$, les tables de vérités des opérateurs classiques dans cette logique propositionnelle sont les suivantes :

(a) $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	$\bot$
?	$\top$	?
?	$\bot$	$\bot$
?	?	?

(b) $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	?	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	?
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

(c) $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	$\top$

(d) $\neg A$

A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$
?	?

Définitions

Définition 1 Tri-valuation.
Une tri-valuation est une fonction $f : \mathcal{V} \to \{\top, \bot, ?\}$.

On étend alors de manière usuelle la notion de tri-valuation sur l'ensemble des formules :

Définition 2 Une tri-valuation sur l'ensemble des formules est une fonction $\widehat{f} : \mathcal{F} \to \{\top, \bot, ?\}$.

Définition 3 Une tri-valuation $\widehat{f}$ satisfait une formule ϕ si $\widehat{f}(\phi) = \top$. On notera alors $\widehat{f} \vdash_3 \phi$.

Définition 4 Formule.
Une formule ϕ est :
— une conséquence d'un ensemble de formules $\mathcal{X}$ si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de $\mathcal{X}$ satisfait ϕ. On notera dans ce cas $\mathcal{X} \Vdash_3 \phi$;
— une tautologie si pour toute tri-valuation $\widehat{f}$, $\widehat{f}(\phi) = \top$. On notera dans ce cas $\Vdash_3 \phi$.

Questions

I.1. Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.

I.2. Proposer alors une tautologie simple dans cette logique.
Posons $\top = 1$, $\bot = 0$ et $? = 0,5$.

I.3. Proposer un calcul simple permettant de trouver la table de vérité de $A \wedge B$ en fonction de A et B. Même question pour $A \vee B$.

I.4. En logique bi-valuée classique, les propositions $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes. Qu'en est-il dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée ?

I.5. En écrivant les tables de vérité, indiquer si les propositions $\neg B \Rightarrow \neg A$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes.

I.6. Donner la table de vérité de la proposition $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Cette proposition est-elle une tautologie ?
Un nouvel opérateur d'implication, noté $\to$, est alors défini, dont la table de vérité est la suivante :

A	B	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

I.7. $A \to A$ est-il une tautologie ?

I.8. Montrer qu'il n'existe aucune tautologie en utilisant uniquement cette définition de l'implication.

I.9. La proposition suivante est-elle une tautologie :

$$\text{“ } (\{A\} \Vdash_3 B) \text{ est équivalent à } (\Vdash_3 A \rightarrow B) \text{ ” ?}$$

On définit alors un type **FormuleLogique** représentant les formules de la manière suivante :
type Formulelogique
| Vrai (* Constante Vrai *)
| Faux (* Constante Faux *)
| Indetermine (* Constante Indeterminé *)
| Var of string (* Variable propositionnelle *)
| Non of FormuleLogique (* Négation d'une formule *)
| Et of FormuleLogique*FormuleLogique (* conjonction de deux formules *)
| Ou of FormuleLogique*FormuleLogique (* disjonction de deux formules *)
| Implique of FormuleLogique*FormuleLogique (* implication *)

I.10. Avec la représentation précédente, écrire en CaML la formule :

$$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B.$$

I.11. Écrire alors une fonction récursive CaML **lectureFormule**, prenant en argument une formule et renvoyant une chaine de caractères spécifiant comment un lecteur lirait la formule. Ainsi, par exemple, pour $\phi = A \wedge (\neg B)$, **lectureFormule** renvoie **A et non B**.