Lycée FABERT - MP - Option Info

2020-2021

Corrigé

TD13

On note pour un automate A, D(A) l'ensemble des mots lus par A et L(A) le langage reconnu par A.

Exercice 1.

1) $D(\mathcal{A}) = D(A) \cap D(A')$

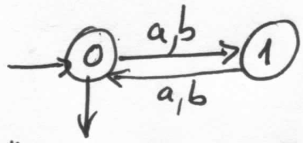
2) Si l'ensemble des états finaux de $\mathcal{A}$ est $F \times F'$ $\quad L(\mathcal{A}) = L(A) \cap L(A')$

3) Si l'ensemble des états finaux de $\mathcal{A}$ est $(F \times \Sigma') \cup (\Sigma \times F')$ $\quad L(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots lus par $\mathcal{A}$ qui sont reconnus par A ou par A'

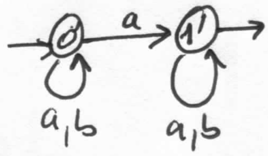
càd $L(\mathcal{A}) = (L(A) \cup L(A')) \cap D(\mathcal{A})$ ou encore $L(\mathcal{A}) = (L(A) \cap D(A')) \cup (L(A') \cap D(A))$

4) Pour que $L(\mathcal{A}) = L(A) \cup L(A')$ il suffit que $D(\mathcal{A}) = X^*$ (d'après 3)) soit que $D(A) = D(A') = X^*$. Ceci est en particulier le cas lorsque A et A' sont complets.

5) Automate A reconnaissant les mots de longueur paire

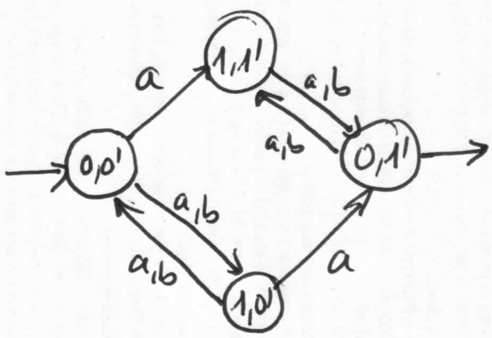


Automate A' reconnaissant les mots contenant au moins un "a" :

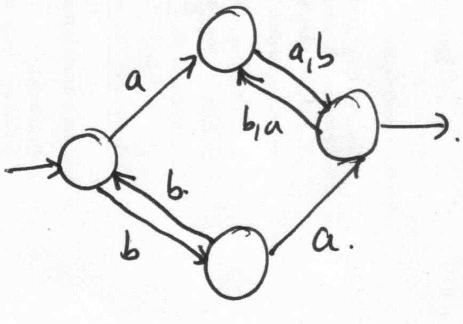


Leur automate produit reconnaît l'ensemble des mots de longueur paire contenant au moins un "a" en prenant comme états finaux $\{0\} \times \{1'\}$

On obtient



Qu'on peut simplifier en



6) La question 2) montre que l'intersection de 2 langages reconnaissables par automate fini est reconnaissable par automate fini.

Compte-tenu du fait que tout langage reconnaissable par automate fini est reconnu par un automate complet, la question 4) prouve que l'ens. des langages reconnaissables par automate fini est stable par réunion.

Si L est un langage reconnaissable et que $A = (\Sigma, I, T, F)$ est un automate déterministe et complet reconnaissant L alors $A' = (\Sigma, I, T, {}^cF)$ reconnaît ${}^cL$ donc ${}^cL$ est égalt reconnaissable.

Exercice 2.

1) Si A est déterministe on a $\forall \mathcal{P} \subset \Sigma$ et $\forall u \in X^*$, $|\mathcal{P} \circ u| \leq |\mathcal{P}|$

2) Si A complet, $\forall \mathcal{P} \neq \emptyset$ et $\forall u \in X^*$, $\mathcal{P} \circ u \neq \emptyset$

3) $u \in L(A) \iff \mathcal{C}(u) \cap F \neq \emptyset$

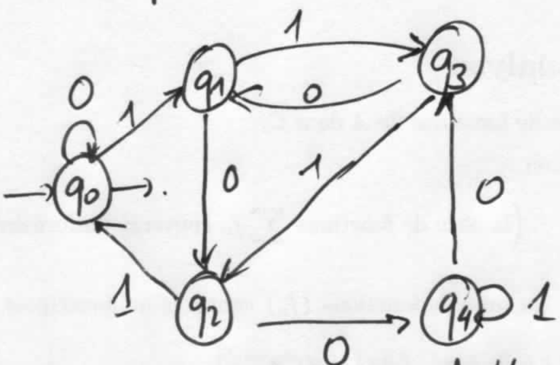
Exercice 3.

On considère un automate à 5 états (on se trouve dans l'état q_i quand l'entier lu est congru à i modulo 5).

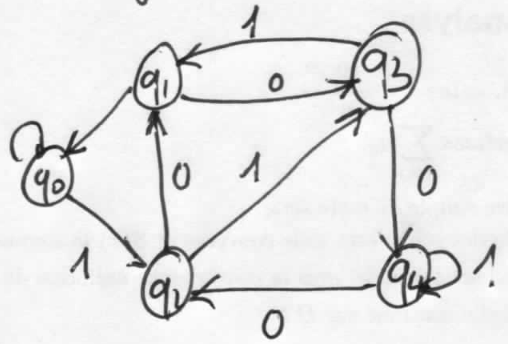
Si $n = 2q+r$ et que

$q \equiv 0\ [5]$	$n \equiv r\ [5]$
$q \equiv 1\ [5]$	$n \equiv 2+r\ [5]$
$q \equiv 2\ [5]$	$n \equiv 4+r\ [5]$.
$q \equiv 3\ [5]$	$n \equiv 1+r\ [5]$
$q \equiv 4\ [5]$	$n \equiv 3+r\ [5]$.

d'où l'automate



Si on lit les entiers à partir du bit de poids le plus faible il suffit d'inverser l'ordre des transitions et d'échanger état final et état initial.



Exercice 4.

Il y a trois types de mots dans le langage : ceux qui contiennent au moins 1 a et un b avant leur dernier caractère (état q6) ceux qui ne contiennent que des a et de longueur ≥ 2 (q2) et ceux qui ne contiennent que des b de longueur ≥ 2 (q5).