Lycée FABERT - MP Option informatique 20.01.2021

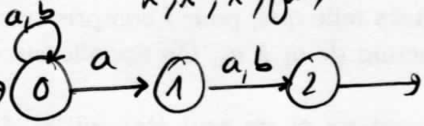
Corrigé. TD15

Exercice 1.

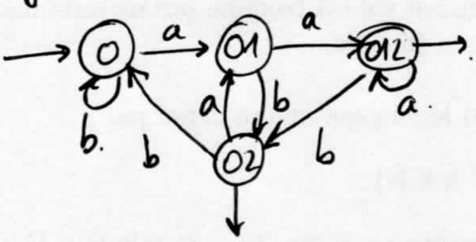
a) $L = X^*aX = X^*(ab+ba)$ L est donc rationnel.

S'il était local on aurait $I = F = X$ et $B = X^2$ or $L_{X,X^2,X,\text{faux}} \not\subset L$.

car $bb \in L_{X,X^2,X,\text{faux}}$ et $bb \notin L$

b) A :  A reconnaît L

c) Par l'algorithme de déterminisation on obtient

A' : 

d) • Comme aa et $ab \in L$, $I.aa$ et $I.ab$ sont finaux

Si on avait $I.aa = I.ab$ alors $(I.aa).a = (I.ab).a$ ce qui n'est pas le cas puisque $aaa \in L$ tandis que $aba \notin L$

Ainsi A'' possède au moins quatre états et l'on constate que ce minorant a été obtenu par A'.

• Pour un automate non déterministe, on ne peut définir $u \in X^* \to I.u$ de la même façon (où I est l'un des états initiaux fixé) et donc la minoration ne s'applique pas de même à A. de fait A n'a que 3 états.

Toutefois un automate reconnaissant L ne peut avoir un nombre d'états ≤ 2 car sinon il y aurait des mots reconnus de longueur ≤ 1 ce qui est absurde.

Exercice 3

a) On a $\begin{cases} L = aL \cup bL' \cup \varepsilon \\ L' = aL' \cup bL \end{cases}$

b) Comme $\varepsilon \notin a$, la seconde équation implique $L' = a^*bL$ d'après le lemme d'Arden.

c) La 1ère équation devient $L = aL \cup ba^*bL \cup \varepsilon = (a+ba^*b)L \cup \varepsilon$

donc d'après le lemme d'Arden L est le langage dénoté par l'expression rationnelle $(a+ba^*b)^*$

Exercice 4

$f(100) = f(f(111)) = f(101) = 91$;

$f(99) = f(f(110)) = f(100) = 91$;

$\vdots$

en itérant on vérifie que $\forall n \leq 100$, $f(n) = 91$

Par ailleurs, $\forall n > 100$, $f(n) = n-10$

donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \max(n-10, 91)$.

Exercice 2

1. Supposons $\mathscr{L}$ reconnaissable par un automate fini A à N états que nous notons $\{q_1, \dots, q_N\}$. Alors la lecture de $a^N b^N$ est de la forme : $q_{i_0} \xrightarrow{a} q_{i_1} \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} q_{i_N} \xrightarrow{b} q_{i_{N+1}} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} q_{i_{2N}}$ avec q_{i_0} état initial et $q_{i_{2N}}$ état final. Comme l'automate n'a que N états, les indices $i_0, \dots, i_N$ ne peuvent être deux à deux distincts donc il existe deux entiers j, k tels que $0 \leqslant j < k \leqslant N$ et $i_j = i_k$. Mais alors, en retirant les transitions entre q_{i_j} et q_{i_k}, l'automate reconnaît aussi le mot $a^M b^N$ avec $M = N - (k-j) \neq N$ donc $L(A) \neq \mathscr{L}$ d'où la contradiction.
2. abb n'est pas un antidrome tandis que $abab$ en est un.
3. Un mot non vide, de la forme $\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k$, est un antidrome si et seulement si k est pair et si pour tout $i \in [\![1, k/2]\!]$, $\ell_i \neq \ell_{k+1-i}$
4. $\mathscr{A} \cap (a^*b^*)$ est le langage $\mathscr{L}$ de la question préliminaire et si on note $\mathscr{L}' = \{b^n a^n / n \in \mathbb{N}\}$, $\mathscr{A} \cap (a^*b^*a^*) = \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$.
5. On sait (se reporter par exemple au TD13) que l'intersection de deux langages reconnaissables par automate est reconnaissable par automate autrement dit que l'intersection de deux langages rationnels est un langage rationnel. En outre a^*b^* est rationnel (par définition !) donc si $\mathscr{A}$ était rationnel, $\mathscr{L} = \mathscr{A} \cap (a^*b^*)$ serait également rationnel ce qui est faux d'après la première question donc $\mathscr{A}$ n'est pas rationnel.