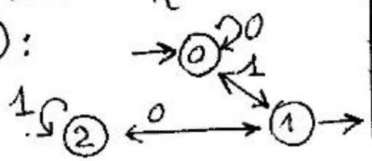
Problème 2

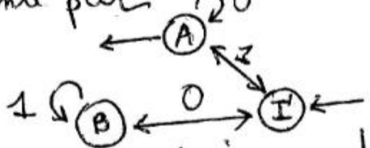
(1) $\varphi(ul) = 2\varphi(u) + \varphi(l)$; nous nous autorisions à « confondre » $\varphi(l)$ et l.

(2) $I = \textcircled{0}$:



Pour tout mot u, l'état terminal de son déchiffrement est l'état numéroté $\varphi(u)$. Cq de (1).

(3) $L' = \overline{L}$ (les deux problèmes ne sont effectivement « quasiment » indépendants). Donc L' est reconnu par



Par chance, il est déterministe et même complet.

(4) Ce dessin montre bien que $L'(1\cdot 1)^* \subset L'$ car $A\cdot 11 = A$. En outre, si $|u| = r$, $\varphi'(u11) = \varphi'(u) + 3\cdot 2^r$ et donc $\varphi'(u) \equiv 1\ (3) \Rightarrow \varphi'(u11) \equiv 1\ (3)$.

(5) $(uv \in L' \Leftrightarrow v \in L') \Leftrightarrow u^{-1}L' = L'$; or, il y a trois résiduels distincts : $\varepsilon^{-1}L' = L'$, $0^{-1}L' = 0\cdot L'$, $1^{-1}L' = \varepsilon + 1\cdot L'$

Donc $u^{-1}L' = L' \Leftrightarrow I'\cdot u = I' \Leftrightarrow \begin{cases} |u| \in 2\mathbb{Z},\ \varphi'(u) \in 3\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ |u|-1 \in 2\mathbb{Z},\ \varphi'(u)+1 \in 3\mathbb{Z} \end{cases}$

(6) Pour la même raison qu'en (3), il suffit de mq $\{u \ /\ \varphi(u) - q \in p\mathbb{Z}\}$ est reconnaissable. Cette fois, notamment, les états vont s'appeler $0, 1, \dots, p-1$ (ce qui énumère $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) et les transitions $\begin{cases} i \xrightarrow{0} i' & \text{où } i' \text{ représente } 2i \text{ modulo } p \\ i \xrightarrow{1} i'' & \text{où } i'' \text{ représente } 2i+1 \text{ modulo } p \end{cases}$

L'état initial est $\textcircled{0}$ et l'état final $\textcircled{q}$.

Remarque : on peut conclure différement à la Q(5) ; en effet, on rq (modulo 3), $\varphi'(u) = \varphi(u)$ si $|u|$ impaire et $\varphi'(u) = -\varphi(u)$ si $|u|$ paire.

En d'autres termes, $\begin{cases} \text{si } |u| \text{ paire } \varphi'(u) \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi(u) \in 3\mathbb{Z} \\ \text{si } |u| \text{ impaire, } \varphi'(u)+1 \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi(u)+1 \in 3\mathbb{Z} \end{cases}$

Tout cela sort de : $L' = ((10^*1)^*(01^*0)^*)^*$.