

Logique.

T.D.21.

Vous avez été sélectionné(e) pour participer au jeu “Cherchez les Clés du Paradis (CCP)”. Le jeu se déroule en trois épreuves, au cours desquelles vous devez collecter des clés vertes. A l’issue de chacune d’entre elles, vous passez à l’épreuve suivante en cas de succès et êtes éliminé(e) en cas d’échec.

1 Première épreuve

Jean-Pierre Pendule, le célèbre animateur, vous accueille pour la première épreuve. Il vous explique la règle du jeu. Devant vous, deux boîtes et sur chacune d’entre elles une inscription. Chacune des boîtes contient soit une clé verte, soit une clé rouge. Vous devez choisir l’une des boîtes : si le résultat est une clé rouge, alors vous quittez le jeu, si c’est une clé verte vous êtes qualifié(e) pour l’épreuve suivante. Jean-Pierre Pendule dévoile les inscriptions sur chacune des boîtes et vous affirme qu’elles sont soit vraies toutes les deux, soit fausses toutes les deux :

- sur la boîte 1, il est écrit “Une au moins des deux boîtes contient une clé verte” ;
- sur la boîte 2, il est écrit “Il y a une clé rouge dans l’autre boîte”.

Dans toute cette partie, on note P_i la proposition affirmant qu’il y a une clé verte dans la boîte i .

- Q.1** Donner une formule de la logique des propositions représentant la phrase écrite sur la boîte 1.
- Q.2** Donner de même ne formule de la logique des propositions pour l’inscription de la boîte 2.
- Q.3** Donner une formule représentant l’affirmation de l’animateur. Simplifier cette formule de sorte à n’obtenir qu’une seule occurrence de chaque P_i .
- Q.4** Quel choix devez-vous faire pour continuer le jeu à coup sûr ?

2 Deuxième épreuve

Bravo, vous avez obtenu la première clé verte. Jean-Pierre Pendule vous félicite et vous annonce que cette première épreuve n’était qu’une mise en jambe. Avec les mêmes règles du jeu, l’animateur vous propose alors deux nouvelles boîtes portant les inscriptions suivantes :

- sur la boîte 1, il est écrit “Il y a une clé rouge dans cette boîte, ou bien il y a une clé verte dans la boîte 2” ;
- sur la boîte 2, il est écrit “Il y a une clé verte dans la boîte 1”.

- Q.5** Donner une formule de la logique des propositions pour chaque affirmation.
- Q.6** Sachant qu’encore une fois les deux affirmations sont soit vraies toutes les deux, soit fausses toutes les deux, donner le contenu de chaque boîte. En déduire votre choix pour remporter la deuxième clé verte.

3 Troisième épreuve

Le suspens est à son comble, vous voici arrivé(e) à la dernière épreuve. A votre grande surprise, Jean-Pierre Pendule vous dévoile une troisième boîte et vous explique les règles du jeu. Dans une des boîtes se cache la clé qui vous permet de remporter la victoire finale. Dans une autre boîte se cache une clé rouge qui vous fait tout perdre. La dernière boîte est vide. Encore une fois, chacune des boîtes porte une inscription :

- sur la boîte 1, il est écrit “La boîte 3 est vide” ;
- sur la boîte 2, il est écrit “La clé rouge est dans la boîte 1” ;
- sur la boîte 3, il est écrit “Cette boîte est vide”.

L'animateur affirme que l'inscription portée sur la boîte contenant la clé verte est vraie, celle portée par la boîte contenant la clé rouge est fausse. L'inscription affichée sur la boîte vide est aussi vraie.

Q.7 Donner une formule de la logique des propositions pour chaque inscription.

Q.8 Donner une formule de la logique des propositions synthétisant l'information que vous apportée l'animateur.

Q.9 En supposant que la clé verte est dans la boîte 2, montrer par l'absurde que l'on aboutit à une incohérence.

Q.10 Donner alors la composition des trois boîtes.