Énoncé. T.D.19

Dans tout ce problème, l'alphabet est $X = \{0,\, 1\}$ et l'on convient d'indexer un mot non vide, de longueur r, par $\{0,\, 1,\, \ldots,\, r-1\}$; on définit en outre une application φ de X^* dans $\mathbb{N}$ par

$$\varphi(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\ell_0 \ell_1 \cdots \ell_{r-1}) = \sum_{k=0}^{r-1} \ell_k 2^{r-1-k}$$

1. Pour $u \in X^*$ et $\ell \in X$, donner l'expression de $\varphi(u \cdot \ell)$ en fonction de $\varphi(u)$ et de ℓ.

2. Représenter un automate déterministe $\mathtt{A}$, à un état initial I, reconnaissant l'ensemble des $u \in X^*$ tels que $\varphi(u) - 1 \in 3\mathbb{Z}$.

On définit à présent une application φ' de X^* dans $\mathbb{N}$ par

$$\varphi'(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(\ell_0 \ell_1 \cdots \ell_{r-1}) = \sum_{k=0}^{r-1} \ell_k 2^{k}$$

3. Représenter un automate déterministe $\mathtt{A}'$, à un état initial I', reconnaissant l'ensemble L' des $u \in X^*$ tels que $\varphi'(u) - 1 \in 3\mathbb{Z}$.

4. Vérifier directement, puis à l'aide de $\mathtt{A}'$ (ce qui peut confirmer qu'il est correct !), que

$$[u \in L' \,\text{et}\, v \in (1 \cdot 1)^*] \Longrightarrow uv \in L'$$

5. Quels sont les mots $u \in X^*$ tels que, v désignant un élément de X^*, on ait $uv \in L' \Longleftrightarrow v \in L'$? On pourra caractériser ces mots u à l'aide notamment de la valeur de $\varphi'(u)$.

6. Pour $(p,\, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'ensemble des mots $u \in X^*$ tels que $\varphi'(u) - q \in p\mathbb{Z}$ est-il reconnaissable par automate ?