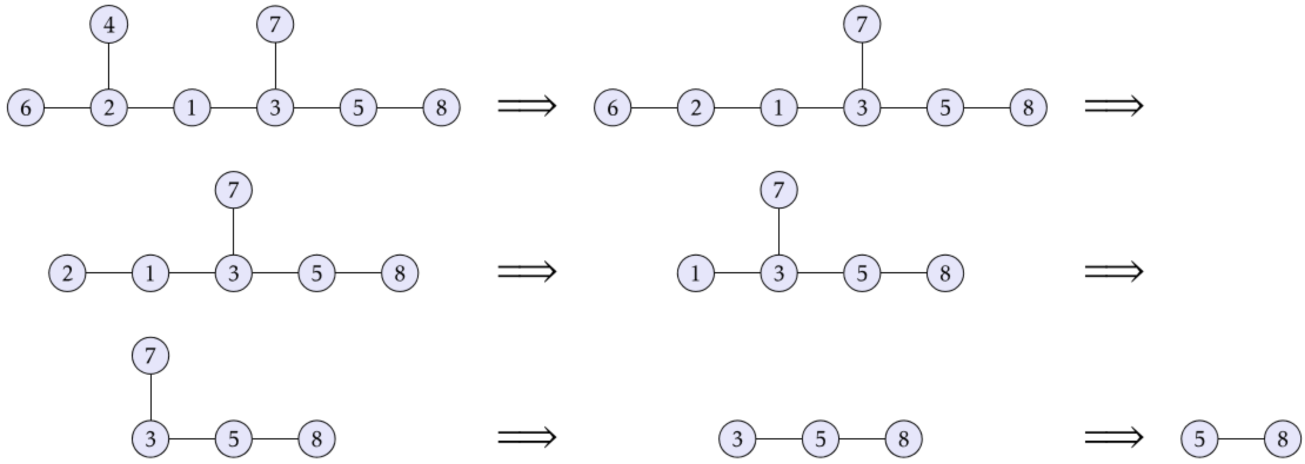
Exercice 1

Notons que la formule $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2n-2$ montre que dans un arbre il existe au moins un sommet de degré 1, ce qui prouve que la terminaison de l'algorithme de Prüfer.

a) La suppression des différents sommets s'effectue de cette façon :



et conduit au codage : $(2,2,1,3,3,5)$.

b) Pour décoder un codage de Prüfer on propose l'algorithme suivant :

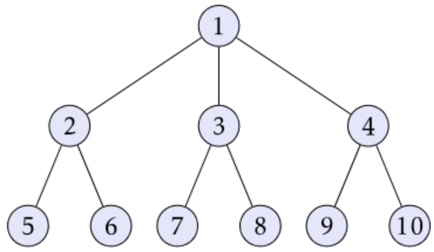
fonction DECODE(liste : L)
  $V \leftarrow [\![1,n]\!]$, $E \leftarrow \emptyset$
  $I \leftarrow V$
  tant que $|I| > 2$ **faire**
    $i \leftarrow \min\left\{ j \in I \mid j \notin L \right\}$
    $E \leftarrow E \cup \{(i, \text{tête}(L))\}$
    $I \leftarrow I \setminus \{i\}$
    $L \leftarrow \text{queue}(L)$
  $E \leftarrow E \cup \{(a,b)\}$ avec $I = \{a,b\}$
  renvoyer (V,E)

qui reconstitue la liste des arêtes qui ont été supprimées par l'algorithme de Prüfer.

c) Avec la suite $(2,2,1,3,3,1,4,4)$, la suite L et les ensembles I et E évoluent de la façon suivante :

L	I	E
$(2,2,1,3,3,1,4,4)$	$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	$\emptyset$
$(2,1,3,3,1,4,4)$	$\{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$	$\{(5,2)\}$
$(1,3,3,1,4,4)$	$\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2)\}$
$(3,3,1,4,4)$	$\{1,3,4,7,8,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1)\}$
$(3,1,4,4)$	$\{1,3,4,8,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3)\}$
$(1,4,4)$	$\{1,3,4,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3),(8,3)\}$
$(4,4)$	$\{1,4,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3),(8,3),(3,1)\}$
(4)	$\{4,9,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3),(8,3),(3,1),(1,4)\}$
$(\ )$	$\{4,10\}$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3),(8,3),(3,1),(1,4),(9,4)\}$
	$\emptyset$	$\{(5,2),(6,2),(2,1),(7,3),(8,3),(3,1),(1,4),(9,4),(10,4)\}$

ce qui conduit à l'arbre :



Exercice 2

Notons $(1, 2, \ldots, n)$ les sommets de $G = (V, E)$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ notons $\mathscr{V}(i)$ l'ensemble des voisins de i. Posons en outre $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $M^p = (m_{ij}^{(p)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Montrons par récurrence sur p que $m_{ij}^{(p)}$ est égal au nombre de chemins de longueur p qui mènent de i à j.

– C'est clair si $p = 1$ puisque $m_{ij}^{(1)} = m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

– Si $p > 1$, supposons le résultat acquis au rang $p - 1$. On a : $m_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^{(p-1)} = \sum_{k \in \mathscr{V}(i)} m_{kj}^{(p-1)}$.

Puisque $m_{kj}^{(p-1)}$ est égal au nombre de chemins de longueur $p - 1$ reliant k à j, $m_{ij}^{(p)}$ est bien le nombre de chemins de longueur p reliant i à j.

En particulier, $m_{ii}^{(p)}$ est le nombre de cycles de longueur p passant par le sommet i. Ainsi, $\mathrm{tr}(M^{(p)})$ est égal au nombre de cycles de longueur p (chaque cycle étant compté autant de fois que le cardinal de son support).

b) En particulier, la matrice M^n n'est pas nulle si et seulement s'il existe un chemin de longueur n. Or dans un tel chemin il existe nécessairement un sommet atteint au moins deux fois, ce qui dénote l'existence d'un cycle au sein de ce chemin.

Réciproquement, à partir d'un cycle de longueur p il est facile de construire un chemin de longueur n en considérant la division euclidienne de n par p : $n = pq + r$ avec $0 \leqslant r < p$. Il suffit de parcourir le cycle dans son entier q fois, puis de parcourir encore r sommets en son sein.

La méthode classique pour calculer le produit de deux matrices d'ordre n a un coût en $\Theta(n^3)$. L'algorithme d'exponentiation rapide appliqué au calcul de M^n aurait donc un coût en $\Theta(n^3 \log n)$.

Exercice 3

a) Effectuer un BFS à partir d'un sommet d'un graphe $G = (V, E)$ permet de déterminer la distance qui le sépare des autres sommets, et donc la longueur du plus long chemin qu'il est possible de tracer à partir de ce sommet. En effectuant ceci pour tout sommet du graphe, on en détermine le diamètre.

On sait qu'un BFS a un coût en $O(n + p)$ avec $n = |V|$ et $p = |E|$, donc cet algorithme détermine le diamètre en $O(n(n + p))$.

b) On propose l'algorithme suivant :

```
fonction DIAMÈTRE(arbre : G = (V, E))
    k ← 0
    tant que |V| > 2 faire
        k ← k + 1
        V ← V \ {v ∈ V | deg v = 1}
    si |V| = 2 alors
        renvoyer 2k + 1
    else
        renvoyer 2k
```

Autrement dit, on effeuille l'arbre jusqu'à ne plus obtenir que 1 ou 2 sommets. Si k étapes ont été nécessaires, le diamètre vaut $2k$ s'il ne reste plus qu'un sommet, et $2k+1$ s'il en reste deux.

Notons G′ l'arbre obtenu en enlevant de G tous ses sommets de degré 1 ainsi que les arêtes associées (G′ est bien un arbre car il reste connexe et acyclique). Nous allons prouver que $d(\mathrm{G}) = d(\mathrm{G}') + 2$, d désignant le diamètre, ce qui suffira à valider l'algorithme.

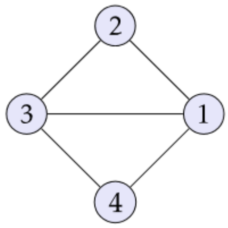
Considérons un chemin maximal $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ tracé dans G. Nécessairement, v_0 et v_i sont de degré 1 car sinon ce chemin pourrait être prolongé et ne serait pas maximal. En revanche, tous les autres sommets de ce chemin sont au moins de degré 2, donc $(v_1, \ldots, v_{i-1})$ est un chemin de G′, et $d(\mathrm{G}) - 2 \leqslant d(\mathrm{G}')$.

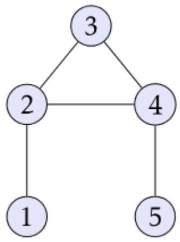
Par ailleurs, tout chemin de G′ se prolonge au maximum par deux arêtes dans G, donc $d(\mathrm{G}') + 2 \leqslant d(\mathrm{G})$, ce qui prouve en définitive l'égalité $d(\mathrm{G}) = d(\mathrm{G}') + 2$.

Il est possible de déterminer le degré de chaque sommet d'un arbre en temps linéaire (voir par exemple l'exercice 4) donc la recherche des feuilles d'un arbre a un coût linéaire. Une fois les feuilles supprimées, il faut mettre à jour les listes d'adjacence, ce qui peut se faire là encore en coût linéaire. La détermination du diamètre d'un arbre a donc *a priori* un coût en $\mathrm{O}(kn)$ où k désigne le diamètre, autrement dit un $\mathrm{O}(n^2)$, ce qui n'est pas mieux que l'algorithme naïf puisque dans le cas d'un arbre, $p = n - 1$.

Exercice 4

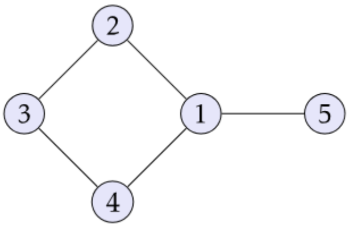
a) Les suites $(3,3,2,2)$ et $(3,3,2,1,1)$ sont graphiques, comme le prouvent les deux graphes ci-dessous :

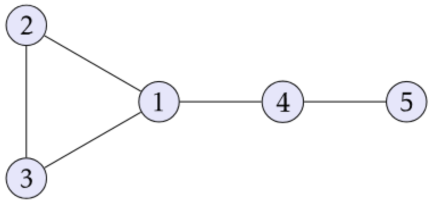




En revanche, la suite $(3,3,1,1)$ ne peut être graphique. En effet, dans un graphe d'ordre 4 ayant deux sommets de degré 3, autrement dit deux sommets reliés à chacun des trois autres, les deux derniers sommets sont au moins de degré 2.

b) Les deux graphes suivants sont distincts bien que correspondants tous deux à la suite $(3,2,2,2,1)$:





Réciproquement, si $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, nous allons montrer qu'il existe un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ tel que $\mathrm{V} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\deg(v_i) = d_i$ et *tel que v_1 soit adjacent aux sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$*. Une fois ceci prouvé, il suffira de supprimer v_1 ainsi que les arêtes qui le relient au reste du graphe pour en déduire que la suite $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ est graphique.

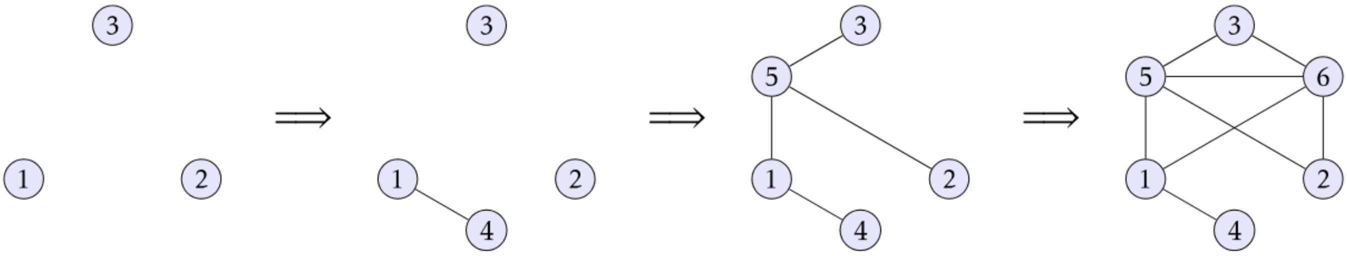
Nous allons prouver l'existence de G par l'absurde en considérant un graphe G pour lequel v_1 est relié au plus grand nombre possible de sommets parmi $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$, mais pas à tous.
Dans ces conditions, il existe $i \in [\![2, d_1 + 1]\!]$ tel que $(v_1, v_i) \notin \mathrm{E}$ et $j \in [\![d_1 + 2, n]\!]$ tel que $(v_1, v_j) \in \mathrm{E}$. Puisque $i \leqslant j$ on a $\deg(v_i) \geqslant \deg(v_j)$. Traitons alors deux cas.

- Si $\deg(v_i) = \deg(v_j)$, tous les sommets d'indices dans $[\![i, j]\!]$ ont même degré, et il suffit d'inverser la numérotation des sommets v_i et v_j pour aboutir à une contradiction.
- Si $\deg(v_i) > \deg(v_j)$, il existe un sommet v_k tel que $(v_i, v_k) \in \mathrm{E}$ mais $(v_j, v_k) \notin \mathrm{E}$. En particulier, notons que $v_k \neq v_1$. Supprimons alors les arêtes (v_1, v_j) et (v_i, v_k) et ajoutons les arêtes (v_1, v_i) et (v_j, v_k). La suite des degrés reste inchangée, mais maintenant v_1 est relié à un sommet de plus parmi $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$ ce qui contredit le caractère maximal de G et achève la preuve du théorème.

d) Prouvons tout d'abord que la suite $(4,4,3,2,2,1)$ est graphique en appliquant le théorème :

$$\begin{aligned}(4,4,3,2,2,1) \text{ est graphique} &\iff (3,2,1,1,1) \text{ est graphique} \iff (1,0,0,1)=(1,1,0,0) \text{ est graphique}\\ &\iff (0,0,0) \text{ est graphique.}\end{aligned}$$

La suite $(0,0,0)$ est bien graphique donc la construction demandée est possible, et la preuve du théorème nous donne un moyen de construire une solution à partir des équivalences ci-dessus :



$(0,0,0)$ $\quad$ $(1,0,0,1)$ $\quad$ $(3,2,1,1,1)$ $\quad$ $(4,4,3,2,2,1)$

Si les deux sommets de degré 2 étaient voisins, on obtiendrait en retirant l'arête qui les relie un graphe dont la suite des degrés serait $(4,4,3,1,1,1)$. Or si on applique le théorème à cette suite on obtient :

$$\begin{aligned}(4,4,3,1,1,1) \text{ est graphique} &\iff (3,2,0,0,1)=(3,2,1,0,0) \text{ est graphique}\\ &\iff (1,0,-1,0)=(1,0,0,-1) \text{ est graphique}\end{aligned}$$

ce qui est absurde.