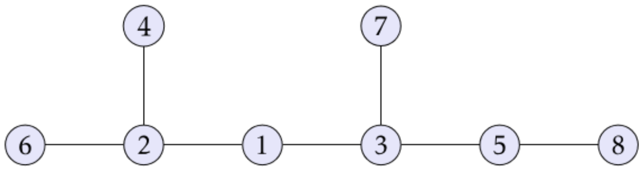
GRAPHES **T.D.6**

Exercice 1

Considérons un arbre $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et $n \geqslant 2$. Le codage de Prüfer permet de décrire précisément cet arbre à l'aide d'une suite finie de $n-2$ entiers de l'intervalle $[\![1, n]\!]$. Il se déroule de la façon suivante :

function PRUFER(arbre : $G = (V, E)$)
  $L = \emptyset$
  while $|V| > 2$ **do**
    $i \leftarrow \min\left\{j \in V \,\middle|\, \deg(j) = 1\right\}$
    Soit $j \in V \,\big|\, (i, j) \in E$
    $L \leftarrow L \cup \{j\}$
    $V \leftarrow V \setminus \{i\}$, $E \leftarrow E \setminus \{(i, j)\}$
  return L

a) Déterminer le codage de Prüfer de l'arbre ci-dessous :



b) Proposer un algorithme de décodage du codage de Prüfer.

c) À quel arbre correspond le code $(2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4)$?

Exercice 2

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G d'ordre n, et $p \in \mathbb{N}$.

a) Que représente le coefficient d'indice (i, j) de la matrice M^p ? Et la trace de cette matrice ?

b) Montrer que G contient un cycle si et seulement si la matrice M^n n'est pas nulle. Quel serait le coût d'un algorithme qui utiliserait ce critère pour déterminer l'existence d'un cycle dans un graphe ?

Exercice 3

On appelle *diamètre* d'un graphe non orienté la longueur du plus long chemin acyclique qu'il est possible de tracer.

a) Proposer un algorithme naïf pour calculer le diamètre d'un graphe, et analyser son temps d'exécution.

b) Proposer un algorithme efficace pour calculer le diamètre d'un arbre, et analyser son temps d'exécution.

Exercice 4

Une suite finie décroissante (au sens large) est dite *graphique* s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets correspondent à cette suite.

a) Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

$$(3, 3, 2, 2), \quad (3, 3, 1, 1), \quad (3, 3, 2, 1, 1)$$

b) Trouver deux graphes différents correspondants à la suite $(3, 2, 2, 2, 1)$.

c) Soit $n \geqslant 2$ et $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ une suite décroissante. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) la suite $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ est graphique ;

(ii) la suite $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n)$ est graphique.

Ce résultat constitue le théorème de Havel et Hakimi.

d) Déduire de la preuve de ce résultat un graphe correspondant à la suite $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$. Dans ce graphe, les deux sommets de degré 2 peuvent-ils être voisins ?