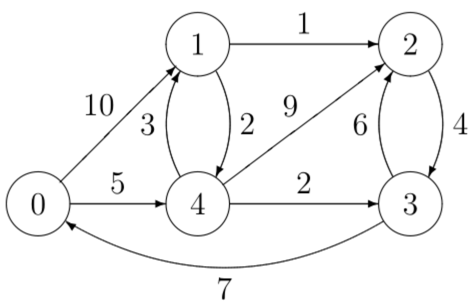
Exercice 1 On considère le graphe orienté et valué suivant :



1. Donner sa matrice d'adjacence ainsi que sa représentation Caml sous forme de listes d'adjacences (les poids n'interviennent pas dans cette question).

2. On veut appliquer l'algorithme de Dijkstra pour trouver les plus courts chemins issus du sommet 0. Rappeler en quelques lignes le principe de la méthode. Le mettre en œuvre sur l'exemple en présentant de manière synthétique et claire les étapes.

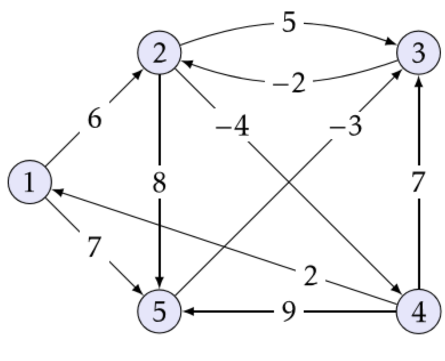
3. Mettre en œuvre l'algorithme de Floyd-Warshall (on ne demande pas d'explication mais chaque grande étape doit être écrite).

Exercice 2

L'algorithme de Bellman-Ford permet de déterminer le plus court chemin à partir d'une source dans un graphe $G = (V, E)$ pondéré par une fonction $w : E \to \mathbb{R}$ pouvant prendre des valeurs négatives. Il se déroule de la façon suivante :

> **function** Bellman-Ford(sommet : s)
>   **for all** $v \in V \setminus \{s\}$ **do**
> $d_v \leftarrow +\infty$
> $d_s \leftarrow 0$
>   **for** $k \in [\![1, |V|-1]\!]$ **do**
>   **for all** $(u,v) \in E$ **do**
> $d_v \leftarrow \min\big(d_v, d_u + w(u,v)\big)$
>   **for all** $(u,v) \in E$ **do**
>   **if** $d_u + w(u,v) < d_v$ **then**
>   **return** Faux
>   **return** Vrai

a) Appliquer cet algorithme au graphe présenté ci-dessous, à partir du sommet $s = 1$.



Que ce passerait-t'il si l'arc $4 \to 5$ était de poids 8 et non pas de poids 9 ?

b) Montrer que si le graphe ne présente pas de cycle de poids négatif, alors à la fin de l'algorithme on a $d_v = \delta(s, v)$ pour tout $v \in V$ et la valeur retournée est « Vrai ».

c) Montrer que si le graphe possède un cycle de poids strictement négatif la valeur retournée est « Faux ».

d) Faire une analyse du coût de cet algorithme.

Exercice 3

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe, et A un ensemble d'arêtes acyclique. Montrer l'existence d'un arbre couvrant contenant toutes les arêtes de A.

Exercice 4

Écrire une fonction `cycle` qui détermine si un graphe non orienté connexe donné par ses listes d'adjacence admet un cycle (c'est-à-dire un chemin fermé).