Mots, motifs T.D.8.

⋆ **Exercice 1 :**
Déterminer tous les mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ dont tous les facteurs sont des préfixes.

⋆ **Exercice 2 :**
a) Montrer que deux mots qui ont le même ensemble de préfixes sont égaux.
b) Le résultat précédent est-il encore vrai si on suppose seulement que les mots ont les mêmes préfixes propres (c'est-à-dire différents du mot entier) ?

⋆ **Exercice 3 :**
Soit $a, b \in \Sigma$ et $x \in \Sigma^*$ tels que $ax = xb$. Montrer que $a = b$ et $x \in a^*$.

⋆ **Exercice 4 :**
Les mots de Fibonacci sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sont définis par récurrence par $f_0 = \varepsilon$, $f_1 = a$, $f_2 = b$ et $\forall\, n \geqslant 3$, $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$.
a) Déterminer, pour $n \geqslant 3$, le suffixe de longueur 2 de f_n en fonction de la parité de n.
b) On note pour $n \geqslant 3$, le mot déduit de f_n en retirant son suffixe de longueur 2. Montrer que g_n est un palindrome.

⋆ **Exercice 5 :** (*)
On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et un langage L vérifiant $L = \{\varepsilon\} \cup aLbL$.
Calculer $(Lb)^*L(aL)^*$.

⋆ **Exercice 6 :** Dans cet exercice, nous allons nous intéresser aux mots ne possédant pas deux facteurs consécutifs égaux, autrement dit, les mots sans facteurs carrés : ils ne peuvent s'écrire rs^2t avec $|s| \geqslant 1$.
a) Montrer que si Σ ne contient que deux lettres, tout mot de quatre lettres ou plus possède un facteur carré.
Considérons maintenant l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et notons σ le morphisme défini par : $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = ba$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^{n-1}(a)$ est un préfixe de $\sigma^n(a)$; on peut donc considérer le mot m de longueur infinie tel que $\sigma^n(a)$ soit préfixe de m pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ce mot infini est connu comme la suite de Thue-Morse.
c) On pose $\Sigma_1 = \{ab, ba\}$. Montrer que si $s \in \Sigma_1^*$, alors asa et bsb n'appartiennent pas à Σ_1^*, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^n(a) \in \Sigma_1^*$.
d) En déduire que m ne possède pas de facteur de la forme r^2x où r est un mot et x la première lettre de r.
On considère enfin le mot μ (infini) formé du nombre de b compris entre deux a consécutifs du mot m.
e) Montrer que l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ est suffisant pour l'écrire, et qu'il ne possède pas de facteurs carrés.
f) Écrire en OCaml une fonction permettant de le générer.