Langages rationnels T.D.9.

⋆ **Exercice 1 :** On note, pour tout langage L, pref (L) le langage constitué des préfixes des mots de L. Déterminer, si L_1 et L_2 sont des langages pref (L_1L_2).

⋆ **Exercice 2 :** Soit Σ un alphabet et a, b deux de ses lettres. Donner une description en français des langages suivants :

$$(\varepsilon+\Sigma)(\varepsilon+\Sigma), \quad (\Sigma^2)^*, \quad (b+ab)^*(a+\varepsilon) \quad (ab^*a+b)*$$

⋆ **Exercice 3 :** Si $\Sigma = \{a, b\}$, donner une expression rationnelle décrivant le langage des mots qui ne contiennent pas le facteur ba.

⋆ **Exercice 4 : Lemme d'ARDEN**
1. Montrer qu'il existe un unique langage L sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ vérifiant $L = aL + b$, et qu'il s'agit du langage dénoté par a^*b.
2. Plus généralement, si A et B sont deux langages sur l'alphabet Σ tels que $\varepsilon \notin A$, montrer que l'équation $L = AL + B$ admet pour unique solution $L = A^*B$.
3. Application Sur $\Sigma = \{a, b\}$, on note L_1 le langage des mots ayant un nombre pair de b et L_2 le langage des mots ayant un nombre impair de b.Écrire deux relations linéaires liant L_1 et L_2 puis les résoudre.

⋆ **Exercice 5 :** Pour éviter d'avoir à mettre des parenthèses dans des expressions rationnelles, on convient des règles de priorité suivantes : étoile puis concaténation puis somme. Ainsi, par exemple, $ab^* + b$ représente $(a.(b^*)) + b$.
On définit le type `expreg` de la manière suivante :

```
type expreg=
  | Vide
  | Const of string
  | Concat of expreg * expreg
  | Choix of expreg * expreg
  | Etoile of expreg;;
```

a) Comment est alors codée l'expression régulière : $e = a + bb^*a$?
b) La hauteur d'étoile d'une expression e est l'entier $h(e)$ défini récursivement à partir des règles suivantes :

- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\varepsilon) = 0$
- pour tout $x \in \Sigma$, $h(x) = 0$
- pour toutes expressions régulières e et f, $h(e + f) = \max(h(e), h(f))$
- pour toutes expressions régulières e et f, $h(e.f) = \max(h(e), h(f))$
- pour toute expression régulière e, $h(e^*) = h(e) + 1$

Écrire une fonction O'Caml qui renvoie la hauteur d'étoile d'une expression régulière (du type défini plus haut).

⋆ **Exercice 6 :** Montrer que si L est un langage rationnel, alors $\sqrt{L}$ est également rationnel (utilise le théorème de Kleene)