Automate produit T.D.13.

Exercice 1. Dans cet exercice, nous définissons le *produit* de deux automates sur un alphabet X, donné une fois pour toutes. Soit un premier automate $A = (\Sigma,\, I,\, T,\, F)$ et un second, $A' = (\Sigma',\, I',\, T',\, F')$, l'un et l'autre n'étant ni supposés déterministes, ni supposés complets ; on définit l'automate produit $\mathscr{A}$ comme il suit : l'ensemble des états est $\Sigma \times \Sigma'$, l'ensemble des états initiaux est $I \times I'$; si $(S_1,\, S'_1)$ et $(S_2,\, S'_2)$ sont dans $\Sigma \times \Sigma'$ et si $\ell \in X$, on définit une transition d'étiquette ℓ de $(S_1,\, S'_1)$ vers $(S_2,\, S'_2)$ si, et seulement si, les transitions $S_1 \xrightarrow{\ell} S_2$ et $S'_1 \xrightarrow{\ell} S'_2$ existent respectivement dans T et dans T'. Pour l'instant, on ne précise pas les états finaux dans ce produit.

1.1 Quel est l'ensemble des mots $u \in X^*$ déchiffrés d'au moins une façon par $\mathscr{A}$?
1.2 Dans cette sous-question, on définit $F \times F'$ comme l'ensemble des états finaux de $\mathscr{A}$; quel est alors le langage reconnu par $\mathscr{A}$?
1.3 Dans cette sous-question, on définit $(F \times \Sigma') \cup (\Sigma \times F')$ comme l'ensemble des états finaux de $\mathscr{A}$; quel est alors le langage reconnu par $\mathscr{A}$?
1.4 À quelle condition suffisante, portant sur A et A', l'automate $\mathscr{A}$ reconnaît-il la réunion des langages reconnus par A et par A' ?
1.5 Dans cette sous-question, $X = \{a,\, b\}$ et L est l'ensemble des mots de longueur paire contenant au moins un a ; déterminer un automate reconnaissant ce langage. [*Il est conseillé de tenter de construire directement un tel automate, puis, à titre de variante, de s'appuyer sur l'une des questions précédentes.*]
1.6 Parmi les opérations suivantes, lesquelles laissent-elles stable l'ensemble des langages reconnaissables par un automate fini : réunion, intersection, passage au complémentaire ?

Exercice 2. Dans cet exercice, nous considérons un alphabet X, donné une fois pour toutes, et un automate $A = (\Sigma,\, I,\, T,\, F)$ qui n'est ni supposé déterministe, ni supposé complet. Si $\mathscr{P}$ est une partie de Σ et ℓ une lettre, nous définissons $\mathscr{P} \cdot \ell$ comme l'ensemble des $S' \in \Sigma$ tels qu'il existe une transition $S \xrightarrow{\ell} S'$, où $S \in \mathscr{P}$.
Si $\mathscr{P} \subset \Sigma$, nous étendons récursivement la définition précédente comme il suit : $\mathscr{P} \circ \varepsilon = \mathscr{P}$ et si $u = v\,\ell$, où $v \in X^*$ et $\ell \in X$, $\mathscr{P} \circ u = (\mathscr{P} \circ v) \cdot \ell$.

2.1 Si l'automate A est déterministe à un état initial, quelle conséquence cela a-t-il sur la construction précédente ?
2.2 Même question si l'automate A est complet, avec $I \neq \emptyset$.
2.3 Pour $u \in X^*$, on pose, en toute généralité, $\mathcal{T}(u) = I \circ u \subset \Sigma$; caractériser à l'aide de cette définition le langage reconnu par A.

Exercice 3. Représenter un automate fini déterministe sur $\{0, 1\}$ qui reconnaît les représentations binaires des entiers divisibles par 5.
Représenter un automate fini déterministe sur $\{0, 1\}$ qui reconnaît les représentations binaires des entiers divisibles par 5, lorsque ceux-ci sont lus à partir du bit de poids le plus faible.

Exercice 4. Sur $\Sigma = \{a, b\}$, représenter un automate qui reconnaît le langage des mots comportant aux moins deux occurrences de leur dernier caractère.