Divers. T.D.15.

⋆ **Exercice 1 :** Dans cet exercice, on pose $X = \{a, b\}$. On considère pour commencer l'ensemble `L` des mots de longueur supérieure ou égale à 2 dont l'avant-dernière lettre est un a.

a) Donner sans justification une expression rationnelle de `L` . Ce langage est-il local ? (Le justifier.)

b) Représenter graphiquement sans justification un automate `A` non déterministe à trois états reconnaissant `L` .

c) Représenter graphiquement sans en détailler la construction un automate déterministe complet accessible `A` ′ reconnaissant `L` .

Si `A` ″ est un automate déterministe complet à un seul état initial I et u un mot, on désigne par $\mathrm{S} \cdot u$ l'état atteint par la lecture de u à partir de S, où S désigne un état de `A` ″.

d) Si `A` ″ reconnaît `L` , que peut-on dire du statut des états $\mathrm{I}{\cdot}aa$ et $\mathrm{I}{\cdot}ab$? Peuvent-ils être confondus ? Que dire alors des états $\mathrm{I}{\cdot}ba$ et $\mathrm{I}{\cdot}bb$? Combien d'états `A` ″ comporte-t-il au minimum ?

Que peut-on dire du nombre d'états d'une automate non déterministe reconnaissant `L` ?

⋆ **Exercice 2 :** Dans ce problème, on considère l'alphabet $X = \{a, b\}$ et on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des *antidromes*, c'est-à-dire des mots qui satisfont la définition récursive qui suit :

— Le mot vide est un antidrome.

— Si le mot $u \in X^*$ est un antidrome, alors les mots $a \cdot u \cdot b$ et $b \cdot u \cdot a$ sont des antidromes

1. Question préliminaire. Montrer que le langage $\mathscr{L}$ formé des mots de la forme $a^n b^n$, où $n \in \mathbb{N}$, n'est pas reconnaissable par automate. On pourra raisonner procéder de la manière suivante : si $\mathscr{L}$ est reconnu par un automate à N états, aboutir à une contradiction en considérant le mot $a^N b^N$ de $\mathscr{L}$.

2. Les mots abb et $abab$ sont-ils des antidromes ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot non vide, de la forme $\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k$, soit un antidrome.

4. Déterminer $\mathscr{A} \cap (a^* b^*)$ ainsi que $\mathscr{A} \cap (a^* b^* a^*)$.

5. Le langage $\mathscr{A}$ est-il rationnel ?

⋆ **Exercice 3 :** On considère sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, le langage L des mots contenant un nombre pair de b et L', le langage des mots contenant un nombre impair de b.

a) Donner un système d'équations vérifiées par L et L'.

b) En déduire L' en fonction de L.

c) Grâce au Lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle de L.

⋆ **Exercice 4 :** Que renvoie la fonction suivante :

```
let rec f n =
  if n>100 then n-10
  else f(f(n+11));;

f : int -> int = <fun>
```