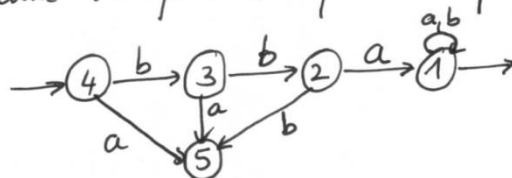


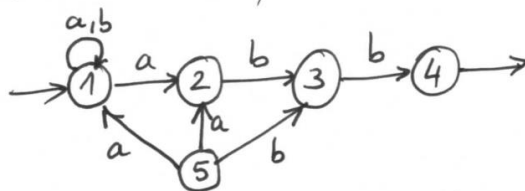
1. Le langage reconnu par A est l'ensemble Σ^*abb des mots se terminant par abb . Il correspond à l'expression rationnelle $(a+b)^*abb$

2. a) $A = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, a, 1), (1, b, 1), (1, a, 2), (2, b, 3), (3, b, 4)\}, \{1\}, \{4\})$
 donc $m(A) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, a, 1), (1, b, 1), (2, a, 1), (3, b, 2), (4, b, 3)\}, \{4\}, \{1\})$.

pour déterminer $m(A)$ il suffit de rajouter des transitions vers un état puits noté 5. donc A' peut se représenter par.



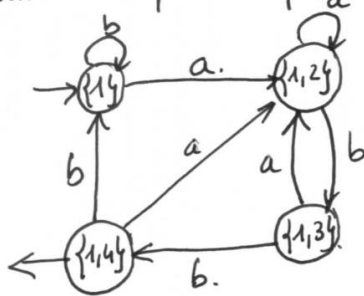
b) Représentons $m(A')$:



on lui applique l'algorithme de détermination :

on constate qu'il ne compte que 4 états accorités

et peut être représenté par :



	a	b
$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$
$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 4\}$
$\{1, 4\}$	$\{1, 2\}$	$\{1\}$

3. a) Soit $\mathcal{L}$ un langage reconnaissable et $B = (Q, T, I, F)$ un automate le reconnaissant.

Posons $m(B) = (Q, T', F' = I, I' = F)$. Soit $u = a_n a_{n-1} \dots a_1 \in \Sigma^*$

$$u \in m(\mathcal{L}) \Leftrightarrow m(u) = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (q_0, q_1, \dots, q_n) \in Q^{n+1} \text{ tel que} \\ \forall i \in [1, n] (q_{i-1}, a_i, q_i) \in T' \\ q_0 \in I \text{ et } q_n \in F' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (q_0, q_1, \dots, q_n) \in Q^{n+1} \text{ tq} \\ \forall i \in [1, n], (q_i, s_i, q_{i-1}) \in T' \\ q_n \in I' \text{ et } q_0 \in F' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathcal{L}(m(B))$$

on a donc $m(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(m(B))$ donc $m(\mathcal{L})$ est reconnu par $m(B)$.

b) Notons $\mathcal{L}(B)$ le langage reconnu par B

$$\text{et } B' = d(m(B)) \quad B'' = d(m(B')).$$

on sait que pour tout automate $\mathcal{C}$ $\mathcal{L}(d(\mathcal{C})) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

donc $\mathcal{L}(B') = \mathcal{L}(m(B))$ qui d'après a) est égal à $m(\mathcal{L}(B))$

$$\text{en réitérant } \mathcal{L}(B') = m(\mathcal{L}(B')) = m(m(\mathcal{L}(B)))$$

on il est évident que pour tout langage $\mathcal{L}$, $m(m(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Le langage reconnu par $B'' = d(m(d(m(B))))$ est donc $\mathcal{L}(B)$ c-à-d le même langage que celui reconnu par B .

4.a). D'après la partie précédente le langage reconnu par A'' est le même que celui reconnu par A c-à-d celui des mots se terminant par abb . C'est également le langage reconnu par l'état $\{1\}$ de A'' (car $\{1\}$ est l'état initial de A'')

- le langage L_2 reconnu par $\{1, 2\}$ est différent de L_1 car il contient le mot bb
- le langage L_3 reconnu par $\{1, 3\}$ est différent de L_1 et de L_2 car il contient le mot b qui n'appartient ni à L_1 ni à L_2 .
- le langage L_4 reconnu par $\{1, 4\}$ est différent de L_1, L_2 et L_3 car il contient le mot vide ϵ .

Conclusion: L_1, L_2, L_3 et L_4 sont 4 langages distincts.

b) Soit $B = (Q, \delta, q_1, F)$ un automate déterministe reconnaissant le même langage L_1 que A (les L_i pour $i \in [1, 4]$ ont été définies en 4.a) comme les langages reconnus par les différents états de A'')

Notons q_2, q_3, q_4 les états (non nécessairement distincts a priori) de B tels que $q_2 = \delta(q_1, a)$ $q_3 = \delta(q_2, b)$ et $q_4 = \delta(q_3, b)$

On a alors en notant L_q le langage reconnu par l'état q de l'automate B , pour tout $i \in \{1, 4\}$, $L_{q_i} = L_i$

En effet $L_{q_1} = \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A) = L_1$

Pour montrer que $L_{q_2} = L_2$ il suffit de remarquer que si un mot $m \in L_{q_2} \Leftrightarrow am \in L_{q_1} \Leftrightarrow am \in L_1 \Leftrightarrow m \in L_2$

On d'après a) L_1, L_2, L_3, L_4 sont 2 à 2 distincts
 donc $L_{q_1}, L_{q_2}, L_{q_3}, L_{q_4}$ sont 2 à 2 distincts
 donc q_1, q_2, q_3, q_4 sont 2 à 2 distincts

L'automate B comporte donc au moins 4 états.

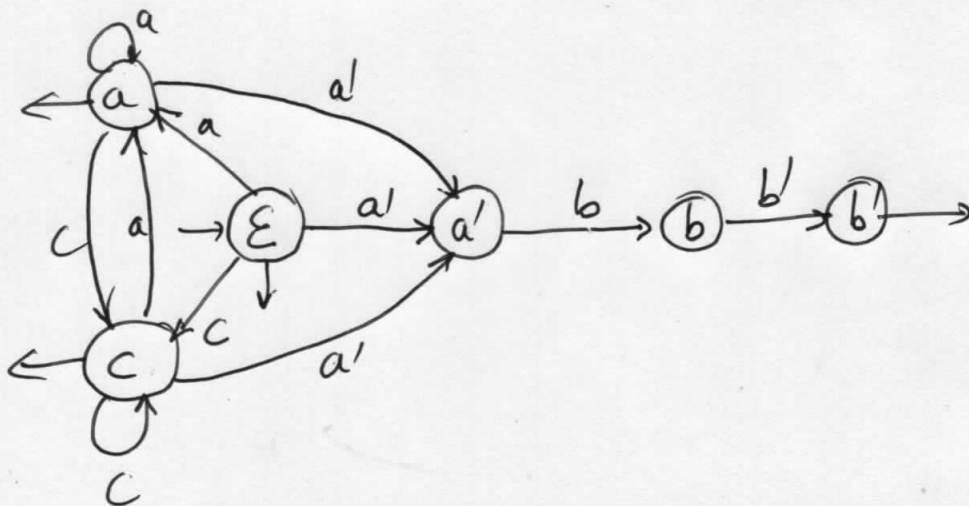
Exercice 2

On linéarise l'expression e en $e' : (a+c)^*(a'bb'+\epsilon)$

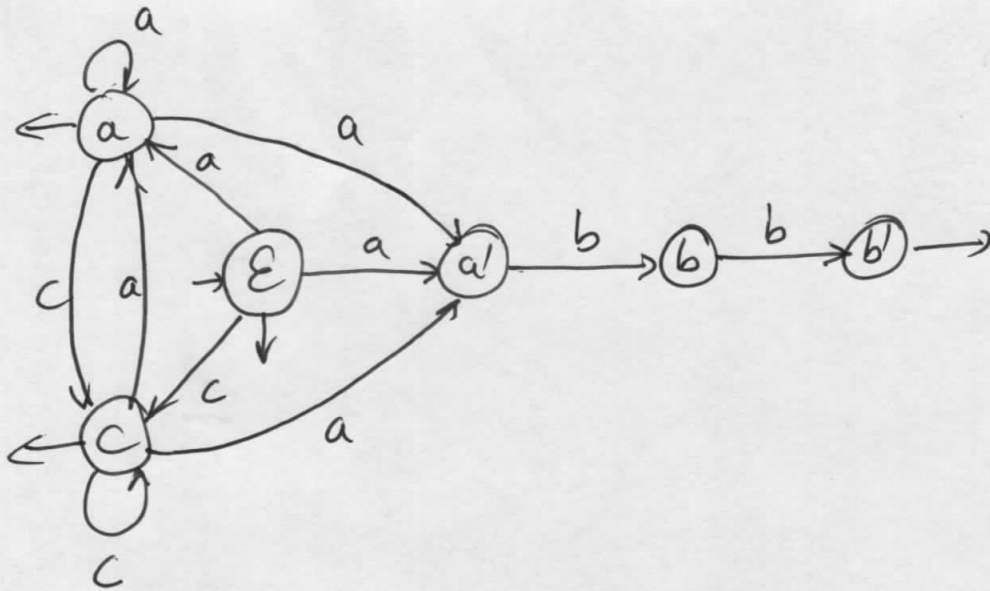
Pour le langage local associé à e' on a $I = \{a, c, a'\}$ $B = \{aa, ac, ca', cafc, ca', a'b, bb'\}$

$F = \{a, c, b'\}$

D'où l'automate local associé:



En supprimant le marquage on obtient l'automate de Glushko



Enfin en déterminisant l'automate précédent on obtient l'automate à 5 états suivants reconnaissant $(a+c)^*(abb+\epsilon)$

