**Minimisation d'automates** **T.D.16**

**Exercice 1 :** Nota bene : au notera qu'au sens de la définition donnée ci-dessous, un automate déterministe est forcément complet.

Dans cette partie, on considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On rappelle les définitions suivantes :

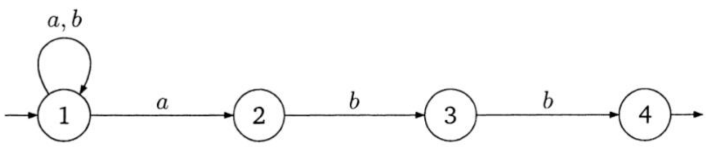
- un automate déterministe sur l'alphabet $\Sigma$ est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q, \delta, i_0, F)$ où :
  - $Q$ est un ensemble fini d'états
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est une application appelée fonction de transition
  - $i_0 \in Q$ est l'état initial et
  - $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finals.
- un automate sur l'alphabet $\Sigma$ est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q, T, I, F)$ où :
  - $Q$ est un ensemble fini d'états
  - $T \subset Q \times \Sigma \times Q$ est l'ensemble des transitions
  - $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux et
  - $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finals.

Le terme «automate» désigne dans la suite un automate pouvant être non déterministe. Si $\mathcal{A}$ est un automate, on note $d(\mathcal{A})$ l'automate déterministe obtenu à partir de $\mathcal{A}$ par l'algorithme habituel de déterminisation. Si $\mathcal{A}$ est un automate, l'automate miroir de $\mathcal{A}$ est l'automate $m(\mathcal{A})$ défini par : $m(\mathcal{A}) = (Q_m, T_m, I_m, F_m)$ où :

- $Q_m = Q$ ;
- $T_m$ est défini par : $(q, s, q') \in T_m \Leftrightarrow (q', s, q) \in T$ ;
- $I_m = F$ et
- $F_m = I$.

Finalement, si $\mathcal{A} = (Q, T, I, F)$ désigne un automate et si $q$ est un état de $\mathcal{A}$, le langage reconnu par l'état $q$ est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}_q = (Q, T, \{q\}, F)$.

Dans la suite $\mathcal{A}$ désigne l'automate suivant :




On pose $\mathcal{A}' = d(m(\mathcal{A}))$ et $\mathcal{A}'' = d(m(\mathcal{A}'))$.

1. Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.
2. (a) Représenter graphiquement l'automate $\mathcal{A}'$.
   (b) Représenter graphiquement l'automate $\mathcal{A}''$. (*Indication : l'automate $\mathcal{A}''$ a quatre états.*)
3. Si $\mathcal{L}$ est un langage, on définit le langage miroir $m(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ par :

$$s_1 s_2 \ldots s_n \in m(\mathcal{L}) \Leftrightarrow s_n s_{n-1} \ldots s_2 s_1 \in \mathcal{L}$$

   (a) Si $\mathcal{L}$ est un langage reconnaissable, montrer que $m(\mathcal{L})$ est également reconnaissable.
   (b) Prouver que si $\mathcal{B}$ est un automate, alors l'automate $d(m(d(m(\mathcal{B}))))$ est un automate déterministe qui reconnaît le même langage que l'automate $\mathcal{B}$.
4. (a) Démontrer que les états de l'automate $\mathcal{A}''$ reconnaissent des langages distincts.
   (b) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun automate déterministe reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}$ et ayant strictement moins d'états que $\mathcal{A}''$.

**Exercice 2 :** Sur l'alphabet {a,b,c}, on considère le langage L dénoté par (a+c)*(abb+ε).
Déterminer l'automate de Glushkov associé et en déduire un automate à 5 états reconnaissant L.