Énoncé. T.D.18

Dans tout ce problème, $X = \{\ell_1, \ldots, \ell_p\}$ désigne un alphabet ; si u est un élément de X^*, on définit $\overline{u}$ (*l'image par miroir* de u) par les règles suivantes : $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ et, pour les mots non vides, $\overline{\ell_{i_1}\ell_{i_2}\cdots\ell_{i_k}} = \ell_{i_k}\cdots\ell_{i_2}\ell_{i_1}$ [1]. Enfin, si $L \subset X^*$, on désigne par $\overline{L}$ l'ensemble des $\overline{u}$, où u décrit L.

1. Lorsque $L = L_{I,B,F,b}$ est local, montrer que $\overline{L}$ l'est aussi en le décrivant sous une forme analogue. Comment obtient-on l'automate local reconnaissant $\overline{L}$ à partir de celui qui reconnaît L ?

2a. Si L_1 et L_2 sont deux langages, déterminer une relation entre $\overline{L_1L_2}, \overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$.
2b. Si L est un langage, déterminer une relation entre $\overline{L^*}$ et $\overline{L}^*$.
2c. Montrer que, si L est rationnel, alors $\overline{L}$ l'est aussi.

Une expression rationnelle peut être représentée par un *arbre de syntaxe*, c'est-à-dire un arbre binaire dont les feuilles sont des langages finis et les nœuds internes, soit les opérateurs binaires $+$ ou $\cdot$, soit l'opérateur unaire *.

2d. Décrire un moyen d'obtenir, à partir un arbre de syntaxe représentant un langage rationnel L, un arbre de syntaxe représentant $\overline{L}$.

3a. Soit $\mathtt{A} = (\Sigma, I, T, F)$, où $T \subset \Sigma \times X \times \Sigma$, un automate reconnaissant un langage L ; décrire un ensemble de transitions $\overline{T} \subset \Sigma \times X \times \Sigma$ de sorte que $\overline{\mathtt{A}} = (\Sigma, F, \overline{T}, I)$ reconnaisse $\overline{L}$.
3b. Si $\mathtt{A}$ est un automate local, votre construction fait-elle de $\overline{\mathtt{A}}$ un automate local ?

4a. Décrire par une expression rationnelle $L \cap \overline{L}$, lorsque $X = \{a, b\}$ et $L = X^*aX^* \cap X^*bX^*$.
[*On rappelle que l'opérateur $\cap$ n'est pas accepté dans une expression rationnelle.*]
4b. Décrire par une expression rationnelle $L \cap \overline{L}$, lorsque $X = \{a, b, c\}$ et $L = (a+b)^*c^*$. Représenter en outre les automates locaux reconnaissant respectivement L et $L \cap \overline{L}$.

5*. Déterminer, avec les justifications, une fonction φ de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même telle que, chaque fois qu'un automate $\mathtt{A}$ à $n \geqslant 1$ états reconnaît un langage L, alors, soit le langage $L \cap \overline{L}$ est vide, soit il contient au moins un mot de longueur $\leqslant \varphi(n)$.

1. On préférera sans doute une définition récursive : $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ et $\overline{u \cdot \ell} = \ell \cdot \overline{u}$.