Fonctions booléennes. C.T.D.20.

A Un opérateur universel

1. Il y a $4 = 2^2$ fonctions de $\{0,1\}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ qui sont :
$x_1 \mapsto 1$, $x_1 \mapsto 0$, $x_1 \mapsto x_1$ et $x_1 \mapsto \neg x_1$

2. Soit $\forall(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n$
<u>premier cas</u> Si $x_n = 0$ alors $\big[x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] = \big[0 \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] = 1$
et $\big[(\neg x_n) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big] = \big[1 \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big] = f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$
et donc $\big[x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] \wedge \big[(\neg x_n) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big] = f(x_1,\ldots,0) = f(x_1,\ldots,x_n)$
<u>deuxième cas</u> Si $x_n = 1$ alors $\big[x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] = f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$
et $\big[\neg x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big] = 1$
donc $\big[x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] \wedge \big[(\neg x_n) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big] = f(x_1,\ldots,x_n)$
Dans tous les cas :

$$\forall(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n, f(x_1,\ldots,x_n) = \big[x_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\big] \wedge \big[(\neg x_n) \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big]$$

3. On va effectuer une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, toute fonction booléenne de $\{0,1\}^1$ dans $\{0,1\}$ peut s'écrire à l'aide des opérateurs $\neg, \wedge$ et $\vee$ et de la variable x_1 à l'aide de **1** en remarquant que $1 = x_1 \vee (\neg x_1)$ et que $0 = x_1 \wedge (\neg x_1)$
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que la propriété soit vraie au rang n. Montrons la au rang $n+1$
Soit alors f : $\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{n+1} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) & \longmapsto & f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \end{array}$
on note $g_0 : (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n,0)$ et $g_1 : (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n,1)$
Par hypothèse de récurrence, on peut écrire les fonctions booléennes g_0 et g_1 à l'aide des opérateurs $\neg, \wedge$ et $\vee$ et des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$
De plus d'après **2.**, on peut écrire
$f : (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \longmapsto \big[(\neg x_{n+1}) \vee g_1(x_1,\ldots,x_n)\big] \wedge \big[x_{n+1} \vee g_0(x_1,\ldots,x_n)\big]$
<u>Conclusion :</u> On a montré que toute fonction booléenne de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ peut s'écrire à l'aide des opérateurs $\neg, \wedge$ et $\vee$ et des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4. On effectue une induction structurelle sur une formule du calcul propositionnel F (donnant la fonction booléenne f), qui peut s'écrire à l'aide des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des opérateurs $\neg, \wedge$ et $\vee$
<u>Cas de base :</u> si $F = x_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, il n'y a rien à démontrer
<u>Hérédité :</u> si on suppose que F_1 et F_2 sont deux formules qui peuvent s'écrire uniquement à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ et des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
si $F \equiv \neg F_1$, alors on peut écrire $F \equiv F_1 \uparrow F_1$
si $F \equiv (F_1 \vee F_2)$ alors on peut écrire $F \equiv (F_1 \uparrow F_1) \uparrow (F_2 \uparrow F_2)$
si $F \equiv (F_1 \wedge F_2)$ alors on peut écrire $F \equiv (F_1 \uparrow F_2) \uparrow (F_1 \uparrow F_2)$
alors F est équivalente à une formule qui peut s'écrire uniquement à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ et des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Conclusion Toute formule est équivalente à une formule écrite uniquement à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ et des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \dots, x_n$
Donc f peut être écrite uniquement à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ et des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \dots, x_n$

B Formule croissante

5. Les fonctions $x_1 \mapsto 1$, $x_1 \mapsto 0$, $x_1 \mapsto x_1$ sont croissantes alors que $x_1 \mapsto \neg x_1$ ne l'est pas.

6. On considère $f : (x_1, x_2) \mapsto (\neg x_1) \vee x_2$
On a $f(0,0) = 1 > 0 = f(1,0)$ alors que $(0,0) \leqslant (1,0)$ donc f n'est pas croissante
et on a $(\neg f)(1,0) = 1 > 0 = (\neg f)(1,1)$ alors que $(1,0) \leqslant (1,1)$ donc $\neg f$ n'est pas croissante

7. Par définition de l'ordre produit, pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, a) \in \{0,1\}^{2n-1}$, on a $(x_1, \dots, x_{n-1}) \leqslant (y_1, \dots, y_{n-1}) \Longrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, a) \leqslant (y_1, \dots, y_{n-1}, a)$
En appliquant la définition d'"être croissante" : si $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ est croissante. on peut affirmer que :
$f_0 : (x_1, \dots, x_{n-1}) \to f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ et $f_1 : (x_1, \dots, x_{n-1}) \to f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ sont croissantes

8. On suppose f est croissante. Soit $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$
on a $f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \leqslant f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ car f est croissante
Si $f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ alors $f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$
Si $f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$ alors $f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$
et on a $f_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$
Dans tous les cas : $f_1 = f_0 \vee f_1$.

9. $\underline{\Rightarrow}$ On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : D'après **5.** et **1.**, une fonction booléenne croissante définie sur $\{0,1\}$ est équivalente à une formule écrite de la variable x_1 et des fonctions constantes à 0 et 1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vérifiée au rang n.
Soit $f : \{0,1\}^{n+1} \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction booléenne croissante.
Soit $x = (x_1, \dots x_n, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$. On a $f(x_1, \dots x_n, x_{n+1}) = (f(x_1, \dots x_n, 1) \wedge x_{n+1}) \vee (f(x_1, \dots x_n, 0) \wedge (\neg x_{n+1}))$
On note $f_0 : f(y_1, \dots y_n) \mapsto f(y_1, \dots y_n, 0)$ et $f_1 : f(y_1, \dots y_n) \mapsto f(y_1, \dots y_n, 1)$.
Ces deux fonctions définies sur $\{0,1\}^n$ sont booléennes croissantes d'après **7.**.
et utilisant encore la croissance de f, on a d'après **8.** :
$f(x) = (f_1(x') \wedge x_{n+1}) \vee (f_0(x') \wedge (\neg x_{n+1})) = ((f_1(x') \vee f_0(x')) \wedge x_{n+1}) \vee (f_0(x') \wedge (\neg x_{n+1}))$
donc en utilisant les règles du calcul propositionnel on a
$f(x) = (f_1(x') \wedge x_{n+1}) \vee (f_0(x') \wedge x_{n+1}) \vee (f_0(x') \wedge (\neg x_{n+1}))$
puis $f(x) = (f_1(x') \wedge x_{n+1}) \vee (f_0(x') \wedge (x_{n+1} \vee (\neg x_{n+1}))$
donc $f(x) = (f_1(x') \wedge x_{n+1}) \vee f_0(x')$
En utilisant l'hypothèse de récurrence sur f_0 et f_1, on peut écrire $f_1(x')$ et $f_0(x')$ à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et des fonctions constantes à 0 et 1.
donc on peut écrire $f(x_1, \dots x_n, x_{n+1})$ à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et x_{n+1} et des fonctions constantes à 0 et 1.
ce qui clôt l'hérédité.
Conclusion On a montré par récurrence que toutes fonctions booléennes croissantes peut s'écrire à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, de ses variables et des fonctions constantes à 0 et 1

$\Leftarrow$ On effectue une induction structurelle sur une formule du calcul propositionnel F (donnant la fonction booléenne f), qui peut s'écrire à l'aide des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des opérateurs des opérateurs $\wedge$ et $\vee$ et des constantes à 0 et 1.

Cas de base : si $F = x_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est croissante.

De même si $F = 0$ ou $F = 1$ alors la fonction sera constante donc croissante

Hérédité : si on suppose que F_1 et F_2 sont deux formules qui pouvant s'écrire à l'aide des "variables propositionnelles" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des opérateurs des opérateurs $\wedge$ et $\vee$ et des constantes à 0 et 1.

On note f_1 et f_2 les fonctions booléennes associées aux formules F_1 et F_2. elles sont croissantes par hypothèse de récurrence.

si $F \equiv (F_1 \vee F_2)$ alors

comme pour a, a', b, b', on a $(a, b) \leqslant (a', b') \Longrightarrow (a \vee b) \leqslant (a' \vee b')$ (en étudiant les quatre cas)

On aura $f = f_1 \vee f_2$ croissante

si $F \equiv (F_1 \wedge F_2)$ alors

comme pour a, a', b, b', on a $(a, b) \leqslant (a', b') \Longrightarrow (a \wedge b) \leqslant (a' \wedge b')$ (en étudiant les quatre cas)

On aura $f = f_1 \wedge f_2$ croissante

Conclusion Pour toute formule écrite à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des constantes à 0 et 1 est associées à une fonction croissante

On a bien établi que la fonction f est croissante si et seulement si elle est équivalente à une formule écrite à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des fonctions constantes à 0 et 1.