Fonctions booléennes. T.D.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On convient de confondre les booléens « vrai » et « faux » avec les entiers 1 et 0. On appelle fonction booléenne toute application :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

A Un opérateur universel

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $n = 1$.
Pour chaque fonction booléenne f de $\{0,1\}$ dans $\{0,1\}$, donner une expression de $f(x_1)$ à l'aide de la variable x_1, de l'opérateur $\neg$ et des booléens 0 et 1.

On revient au cas général : $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit f une fonction booléenne. Justifier l'égalité :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \{0,1\}^n, f(x_1,\dots,x_n) = \big[x_n \Rightarrow f(x_1,\dots,x_{n-1},1)\big] \wedge \big[(\neg x_n) \Rightarrow f(x_1,\dots,x_{n-1},0)\big]$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute fonction booléenne de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ peut s'écrire à l'aide des opérateurs $\neg, \wedge$ et $\vee$ et des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

4. On pose $A \uparrow B = (\neg A) \vee (\neg B)$. Montrer que toute fonction booléenne peut s'écrire uniquement à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ et des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

B Formule croissante

On munit $\{0,1\}^n$ de l'ordre produit :

$$(x_1,\dots,x_n) \leqslant (y_1,\dots,y_n) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \; x_i \leqslant y_i$$

On dit qu'une fonction booléenne f est croissante lorsque :

$$\forall (x,y) \in (\{0,1\}^n)^2, \; x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

5. Dans cette question, on se place dans le cas où $n = 1$.
Pour chaque fonction booléenne de $\{0,1\}$ de la question **1.**, précisez si elle est croissante ou non.

On retourne dans le cas général : $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Donner un exemple de fonction f telle que ni f ni $\neg f$ ne soit croissante. (On justifiera soigneusement le contre-exemple).

7. On suppose que $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ est croissante. Alors peut-on affirmer que :
$f_0 : (x_1,\dots,x_{n-1}) \to f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ et $f_1 : (x_1,\dots,x_{n-1}) \to f(x_1,\dots,x_{n-1},1)$ sont croissantes ?
(On donnera une preuve ou un contre-exemple).

8. Si f est croissante, montrer que $f_1 = f_0 \vee f_1$.

9. Montrer que la fonction f est croissante si et seulement si elle est équivalente à une formule écrite à l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$, des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et des fonctions constantes à 0 et 1.