

Logique et calcul des propositions

C.T.D.21.

1 Première épreuve

Q.1 $B_1 = P_1 \vee P_2$.

Q.2 $B_2 = \overline{P_1}$.

Q.3 On note F la proposition résultant de la règle du jeu (et qui est donc vraie).

$$\begin{aligned} F &= (B_1 \wedge B_2) \vee (\overline{B_1} \wedge \overline{B_2}) \\ &\equiv ((P_1 \vee P_2) \wedge \overline{P_1}) \vee (\overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge P_1) \\ &\equiv (P_1 \wedge \overline{P_1}) \vee (P_2 \wedge \overline{P_1}) \\ &\equiv P_2 \wedge \overline{P_1} \end{aligned}$$

Q.4 Il faut donc choisir la boîte 2.

2 Deuxième épreuve

Q.5 $B_1 = \overline{P_1} \vee P_2$ et $B_2 = P_1$.

Q.6 On a cette fois

$$\begin{aligned} F &\equiv ((\overline{P_1} \vee P_2) \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge \overline{P_2} \wedge \overline{P_1}) \\ &\equiv (\overline{P_1} \wedge P_1) \vee (P_2 \wedge P_1) \vee (P_1 \wedge \overline{P_2} \wedge \overline{P_1}) \\ &\equiv P_1 \wedge P_2 \end{aligned}$$

On peut ainsi choisir n'importe quelle boîte.

3 Troisième épreuve

Il y a des façons plus rapides de conclure que celle proposée par l'énoncé. Essayons toutefois d'en respecter l'esprit.

Q.7 Pour traduire les inscription, on ne peut a priori se contenter des variables P_i des parties précédentes (ou alors il faudrait travailler avec une logique prenant trois valeurs de vérité).

On peut par exemple noter

— P_i la variable valant vraissi la clé verte est dans la boîte i

— R_i la variable valant vraissi la clé rouge est dans la boîte i

On a alors, en notant B_i l'inscription de la boîte i ,

$$B_1 = \overline{P_3} \wedge \overline{R_3}, \quad B_2 = R_1, \quad B_3 = \overline{P_3} \wedge \overline{R_3}$$

(on traduit la vacuité par l'absence de clé verte et de clé rouge).

Q.8 L'information donnée par l'animateur est double : elle concerne d'une part le contenu des boîtes et d'autre part la véracité des inscriptions portées par les boîtes. Pour la traduire à l'aide des variables P_i et R_i , il faut envisager les 6 cas possibles pour la répartition des clefs dans les boîtes (trois choix possibles pour placer la clef verte et ensuite deux choix possibles pour placer la clef rouge dans l'une des deux boîtes encore vides) que l'on peut représenter par exemple à l'aide de l'ensemble S_3 des permutations de $\{1, 2, 3\}$.

L'information donnée par l'animateur est donc par exemple traduite par la véracité de la formule :

$$\bigvee_{\sigma \in S_3} (P_{\sigma(1)} \wedge B_{\sigma(1)} \wedge R_{\sigma(2)} \wedge \overline{B_{\sigma(2)}} \wedge \overline{P_{\sigma(3)}} \wedge \overline{R_{\sigma(3)}} \wedge B_{\sigma(3)})$$

Q.9 Si l'on suppose que la clef verte est dans la boîte 2, alors l'inscription de cette boîte est vraie donc la clef rouge est dans la boîte 1 et la boîte 3 est vide. Dans ces conditions, l'inscription de la boîte contenant la clef rouge est vraie ce qui est contradictoire avec les informations données par l'animateur. On a donc montré par l'absurde que la clef verte ne peut être dans la boîte 2.

Q.10 La clé verte ne peut être dans la boîte 3 (sinon l'inscription est juste et la boîte est vide). On vient de voir qu'elle n'est pas dans la boîte 2 et donc

La clé verte est dans la boîte 1

L'inscription de la boîte 1 est donc vraie et

La boîte 3 est vide

On en déduit que

La clé rouge est dans la boîte 2

Cet exercice était le début de l'épreuve d'option informatique du concours CCP 2018