

Diamètre d'un graphe.

T.D.22.

Dans ce problème, on considère des graphes non orientés connexes. Les sommets d'un graphe à n sommets ($n \in \mathbb{N}^*$) sont numérotés de 0 à $n - 1$. On suppose qu'aucune arête ne boucle sur un même sommet.

Un *chemin de longueur* $p \in \mathbb{N}$ d'un sommet a vers un sommet b dans un graphe est la donnée de $p + 1$ sommets s_0, s_1, \dots, s_p tels que $s_0 = a$, $s_p = b$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les sommets s_{k-1} et s_k sont reliés par une arête de ce graphe.

Un *plus court chemin* d'un sommet a vers un sommet b dans un graphe G est un chemin de longueur minimale parmi tous les chemins de a vers b . Sa longueur est notée $d_G(a, b)$.

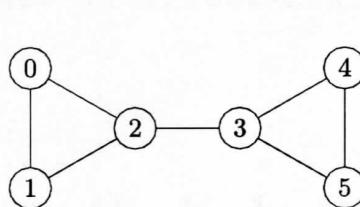
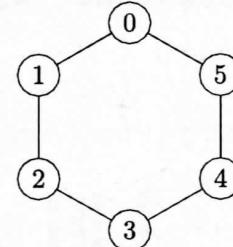
Le *diamètre* d'un graphe G , noté $\text{diam}(G)$, vaut le maximum des longueurs des plus courts chemins entre deux sommets du graphe G . Autrement dit,

$$\text{diam}(G) = \max_{a, b \text{ sommets de } G} d_G(a, b)$$

Un *chemin maximal* d'un graphe G est un plus court chemin de G de longueur $\text{diam}(G)$.

Partie 1 – Exemples de graphes

1. Donner sans justifications le diamètre et les chemins maximaux pour chacun des deux graphes G_1 et G_2 ci-dessous.

graphe G_1 graphe G_2

En OCaml les graphes sont représentés par listes d'adjacence et implémentés par le type
`type graphe = int list array;;`

2. Graphes de diamètre maximal.
 - (a) Dessiner sans justifications un graphe à 5 sommets ayant un diamètre le plus grand possible.
 - (b) Écrire en OCaml une fonction `diam_max` de type `int -> graphe` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie un graphe à n sommets de diamètre maximal.
3. Graphes de diamètre minimal.
 - (a) Dessiner sans justifications un graphe à 5 sommets ayant un diamètre le plus petit possible.
 - (b) Écrire en OCaml une fonction `diam_min` de type `int -> graphe` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie un graphe à n sommets de diamètre minimal.

Partie 2 – Algorithmes de calcul du diamètre

Dans cette partie, on suppose que les graphes sont représentés par listes d'adjacence.

4. Préciser ce que sont l'entrée et la sortie dans l'algorithme de Dijkstra. Comment cet algorithme permet-il de calculer le diamètre d'un graphe ?
5. Quel parcours de graphe peut être utilisé pour le calcul du diamètre ?
6. Laquelle des deux méthodes précédentes est la mieux adaptée pour calculer le diamètre d'un graphe ?

Partie 3 – Diamètre d'un arbre binaire

Dans cette partie, on s'intéresse aux arbres binaires, qui sont des cas particuliers de graphes. On travaille avec une représentation spécifique de ces graphes particuliers, implémentée en OCaml par le type suivant :

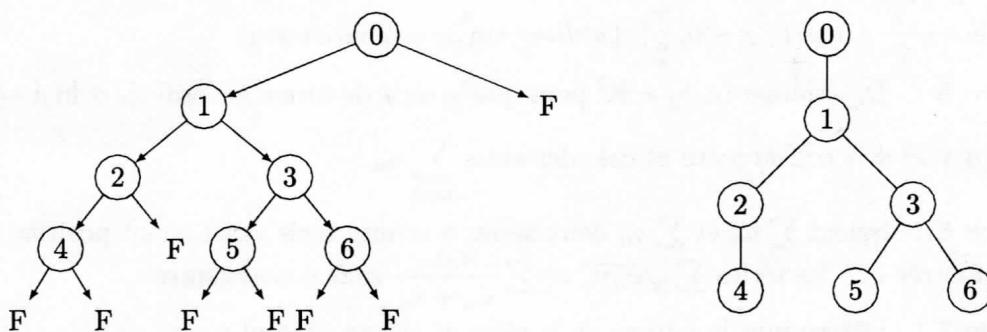
```
type arbre = Feuille | Noeud of int * arbre * arbre;;
```

Le graphe sous-jacent $G_{\mathcal{A}}$ à un arbre binaire \mathcal{A} est défini comme le graphe dont

- les sommets correspondent aux noeuds de l'arbre (et pas aux feuilles)
- les arêtes correspondent aux branches de l'arbre reliant deux noeuds (et non pas celles reliant un noeud à une feuille).

Le diamètre d'un arbre binaire est alors défini comme le diamètre de son graphe sous-jacent.

Voici un exemple d'arbre binaire \mathcal{A} (à gauche) et de son graphe sous-jacent $G_{\mathcal{A}}$ (à droite)



7. Donner l'expression OCaml représentant l'arbre \mathcal{A} de l'exemple. Donner le diamètre de \mathcal{A} et les chemins maximaux du graphe sous-jacent $G_{\mathcal{A}}$.
8. Quel est le nombre r d'arêtes du graphe sous-jacent à un arbre binaire possèdant n noeuds ?
Un première approche pour calculer le diamètre d'un arbre consiste à le transformer en un graphe et à employer un algorithme général sur les graphes de la partie 2.
9. Écrire en OCaml une fonction `nb_noeuds` de type `arbre -> int` qui renvoie le nombre de noeuds d'un arbre binaire donné en argument.
10. Écrire en OCaml une fonction `numerotation` de type `arbre -> arbre` qui prend en argument un arbre binaire \mathcal{A} à n noeuds et qui renvoie un arbre binaire \mathcal{A}' de même graphe sous-jacent que \mathcal{A} et dont les noeuds sont étiquetés de 0 à $n - 1$.
11. Écrire en OCaml une fonction `arbre_vers_graphe` de type `arbre -> graphe` qui prend en argument un arbre binaire \mathcal{A} à n noeuds étiquetés de 0 à $n - 1$ et qui renvoie le graphe $G_{\mathcal{A}}$ sous-jacent à \mathcal{A} (le type `graphe` a été défini dans la partie 1).
12. Décrire un algorithme qui calcule le diamètre d'un arbre de type `arbre` en se ramenant à un graphe. Quelle est sa complexité ?

Une seconde approche pour calculer le diamètre d'un arbre binaire consiste à utiliser une technique diviser-pour-régner. Pour tout arbre \mathcal{A} non réduit à une feuille, de la forme `Noeud(x, arbre_g, arbre_d)`, on note

- \mathcal{A}_g le fils gauche de \mathcal{A} , représenté par `arbre_g`
- \mathcal{A}_d le fils droit de \mathcal{A} , représenté par `arbre_d`.

La hauteur de l'arbre \mathcal{A} , notée $h(\mathcal{A})$, est la longueur du plus long chemin descendant de la racine vers une feuille. Par convention la hauteur d'un arbre réduit à une feuille est égale à 0. Dans l'arbre exemple de la partie 3, l'arbre \mathcal{A} est de hauteur 4.

13. Quelle est la longueur d'un chemin maximal passant par la racine ?

14. Écrire en OCaml une fonction `diam_arbre` de type `arbre -> int` qui calcule le diamètre d'un arbre donné en argument. Cette fonction devra être de complexité linéaire en le nombre de nœuds de l'arbre.