

DM n°3

Thème(s) : Optique – Mécanique du point

EXERCICE 1 : ACTIVITE DANS UN CLUB D'ASTRONOMIE

I- Historique : les lois de Képler

Les lois de Képler, relatives au mouvement des planètes autour du soleil, furent établies expérimentalement puis publiées en 1609 par l'astronome allemand Johannès Képler à partir d'une série d'observations minutieuses faites par l'astronome danois Tycho-Brahé. Ces lois furent énoncées sous la forme suivante :

1^{ère} loi : "Les centres des planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le soleil".

2^{ème} loi : "Les rayons vecteurs balaient en des durées égales des aires égales".

3^{ème} loi : "Les rapports des carrés des périodes de révolution sur les cubes des demi-grands axes sont indépendants de la planète".



On considère un astre, de masse M , de centre O autour duquel gravite un satellite S de masse m .

On se place dans le référentiel d'origine O , lié à l'astre, que l'on suppose galiléen.

La position de S est repérée par ses coordonnées cylindro-polaires dans le repère d'origine O .

On suppose que l'orbite elliptique du satellite présente une excentricité très faible. On la considère alors circulaire, de rayon a , parcourue avec la période T .

On se propose dans cette partie de retrouver par le calcul la 2^{ème} et 3^{ème} lois.

1- Deuxième loi de Képler

1-1) Rappeler l'expression de la force gravitationnelle s'exerçant sur une masse m dans le champ de gravitation de l'astre M en fonction de r , distance entre les deux masses, et G la constante universelle de gravitation.

1-2) En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement de S est plan. On admettra qu'à un instant pris comme origine des dates le moment cinétique du satellite calculé en O est non nul : $\vec{L}_O(t=0) \neq \vec{0}$.

Préciser alors le plan de la trajectoire.

1-3) En déduire la 2^{ème} loi de Képler. Justifier la raison de l'appellation de « loi des aires ».

2- Troisième loi de Képler

2-1) Le mouvement de la terre étant considéré comme circulaire, montrer qu'il est uniforme et exprimer la vitesse en fonction des grandeurs nécessaires parmi a , M , m et G .

2-2) Etablir dans cette situation la relation dite "troisième loi de Kepler" entre a , T et les données nécessaires.

II- Trajectoire de la Terre autour du Soleil

On souhaite établir si la trajectoire de la Terre autour du Soleil est, ou non, très différente d'une trajectoire circulaire.

3) Soient T_H et T_E les durées de l'Hiver et de l'Été respectivement. Dans l'hypothèse d'une trajectoire circulaire, exprimer la vitesse angulaire de la Terre pour chacune des deux saisons.

Document 1 : Extrait d'un calendrier 2017

Pour l'année 2017, les horaires des saisons sont définies de la façon suivante :

- Printemps : le 20/03 à 7h35
- Été : le 21/6 à 1h47
- Automne : le 23/9 à 17h27
- Hiver : le 21/12 à 13h38

La Terre est au plus près du Soleil en un point de la trajectoire appelé *périhélie* le 4 janvier. Un axe de symétrie de la trajectoire est l'axe reliant le périhélie à l'*aphélie* (point où la Terre est au plus loin du Soleil). Les axes reliant les équinoxes (printemps et automne) d'une part et les solstices (hiver et été) d'autre part sont donc décalés par rapport aux axes de symétrie de la trajectoire.

4) Exprimer la durée en jour de l'Été et de l'Hiver. Vérifier que l'hiver est la saison la plus courte.

5) Sur un nombre de jours réduit, la trajectoire peut être assimilée à une portion de cercle (rayon R_H en hiver et R_E en été).

Au voisinage de l'aphélie, en considérant vitesse angulaire du 3), estimer l'aire balayée en un jour d'hiver en fonction de R_H et T_H .

Exprimer de même au voisinage du périhélie l'aire balayée en un jour d'été en fonction de R_E et T_E .

Déduire une relation entre T_H , T_E , R_H et R_E .

6) En assimilant de demi- grand axe de la trajectoire elliptique au rayon a de l'orbite circulaire, en déduire les rayon R_H et R_E .

Vérifier ce résultat à l'aide des données numériques suivantes :

Distance Terre-soleil : environ 147 100 000 km en janvier
152 100 000 km en juillet

7) On peut caractériser l'écart d'une trajectoire elliptique à sa trajectoire circulaire par l'excentricité e définie par :

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p}$$

Où R_a et R_p sont respectivement les rayons à l'*aphélie* et au *périhélie* de la trajectoire.

Calculer la valeur numérique de l'excentricité e de la trajectoire de la Terre autour du Soleil.

Conclusion ?

III- Observation des satellites de Jupiter

On considère quatre des satellites de Jupiter : leur position sur le fond du ciel, vues de la Terre, sont indiquées sur le diagramme ci-dessous (Figure 1).

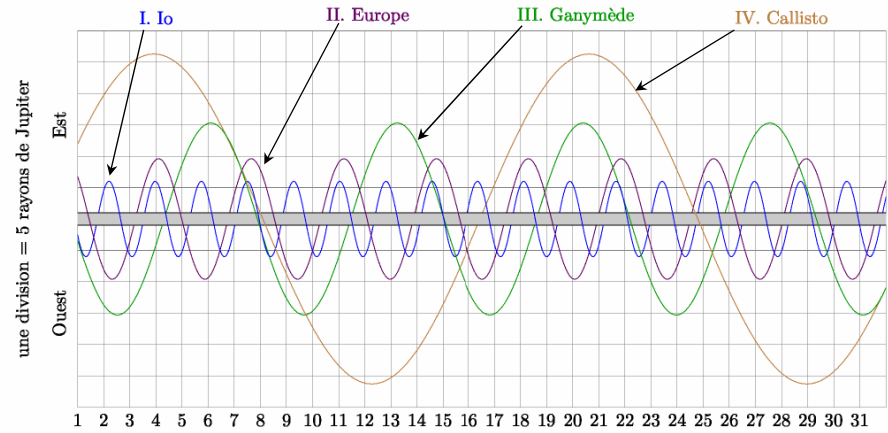


Figure 1 : Positions satellites de Jupiter en Mars 2017 (les jours débutent à 0h GMT)

On émet les hypothèses suivantes :

- les trajectoires sont circulaires et contenues dans le même plan équatorial,
- Jupiter et ses satellites sont homogènes et sphériques,
- on néglige l'attraction gravitationnelle du Soleil et celle des autres planètes et satellites.

- A l'aide du graphique, déterminer les rayons des orbites ainsi que les périodes des quatre satellites naturels de Jupiter.
- Comment peut-on déterminer la masse de Jupiter ? A quelle condition est-il légitime d'assimiler Jupiter et le centre de masse du système constitué de Jupiter et ses satellites ?
- Comment peut-on déterminer la masse de Jupiter ?
- Est-il légitime de négliger l'attraction gravitationnelle du Soleil ? Toute affirmation doit être justifiée numériquement.
- Déterminer numériquement la durée entre deux conjonctions des satellites Europe et Callisto (alignement des 2 satellites avec Jupiter). Vérifier graphiquement votre résultat.

Données :

Constante de gravitation $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
 Rayon de Jupiter $R_J = 7,16 \times 10^7 \text{ m}$
 Période de révolution de la Terre autour du Soleil $1 \text{ an} = 365 \text{ jours}$
 Période de révolution de Jupiter autour du Soleil $11,9 \text{ ans}$
 Distance moyenne Terre-Soleil $1 \text{ UA} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
 Distance moyenne Jupiter-Soleil $5,2 \text{ UA}$

Astre	Soleil	Io	Europe	Ganymède	Callisto
Masse (en kg)	$2 \times 10^{30} \text{ kg}$	$8,9 \times 10^{22} \text{ kg}$	$4,8 \times 10^{22} \text{ kg}$	$1,5 \times 10^{23} \text{ kg}$	$1,1 \times 10^{23} \text{ kg}$

EXERCICE 2 : MESURE DU CHAMP DE PESANTEUR PAR UNE METHODE INTERFEROMETRIQUE

Un interféromètre de Michelson est éclairé par une source monochromatique (longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$) étendue, centrée sur l'axe OX . On note L_1 la longueur OO_1 et L_2 la longueur OO_2 . Cette longueur est variable, car (M_2) est relié à un solide (Sol) mobile en translation selon OZ . On note $e = L_2 - L_1$. L'expérience est menée dans l'air ($n = 1$).
 On note $e = L_2 - L_1$. L'expérience est menée dans l'air ($n = 1$).
 (L) est une lentille convergente de centre optique Ω de distance focale image $f' = 1,0 \text{ m}$ et de foyer image F' (voir Figure 1).

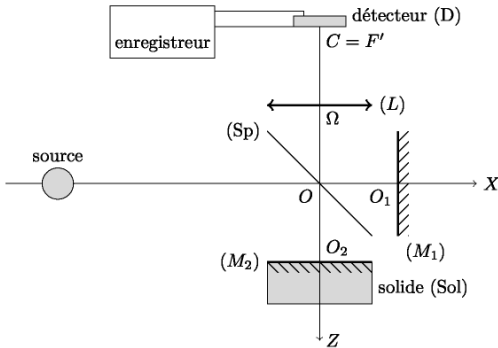


Figure 1 – Montage

- Le solide (Sol) est fixé à une distance L_2 de O .
 La figure 2 présente la figure d'interférence observée sur le détecteur placé dans le plan focal de la lentille de projection (L) .
 - Préciser le mode de réglage de l'interféromètre.
 - Donner sans calcul la différence de marche δ en un point M du capteur.
 - Déterminer le rayon d'un anneau en fonction de l'ordre d'interférence p .
 - Retrouver la valeur de l'épaisseur e à l'aide de la figure d'interférence.
- On replace le solide (Sol) tel que $L_2 = L_1$. (Sol) est lâché en chute libre sans vitesse à $t = 0$.
 Le graphe figure 3 représente l'éclairement **au point F'** en fonction du temps.
 En déduire la valeur du champ de pesanteur terrestre g .

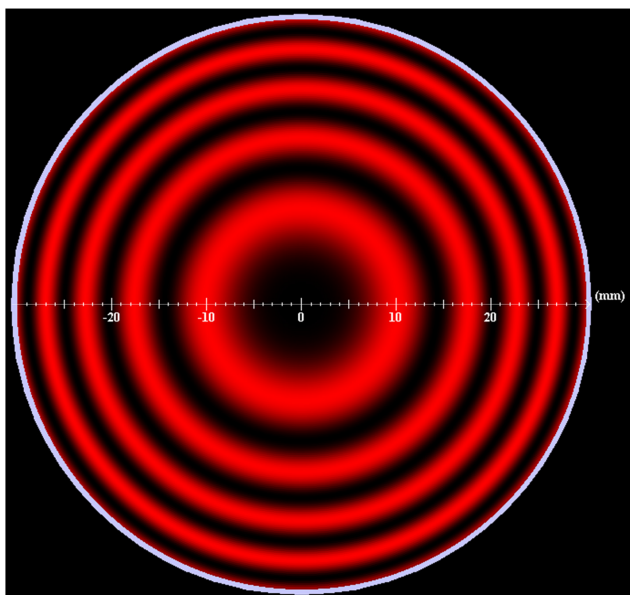


Figure 2 – Figure d'interférences

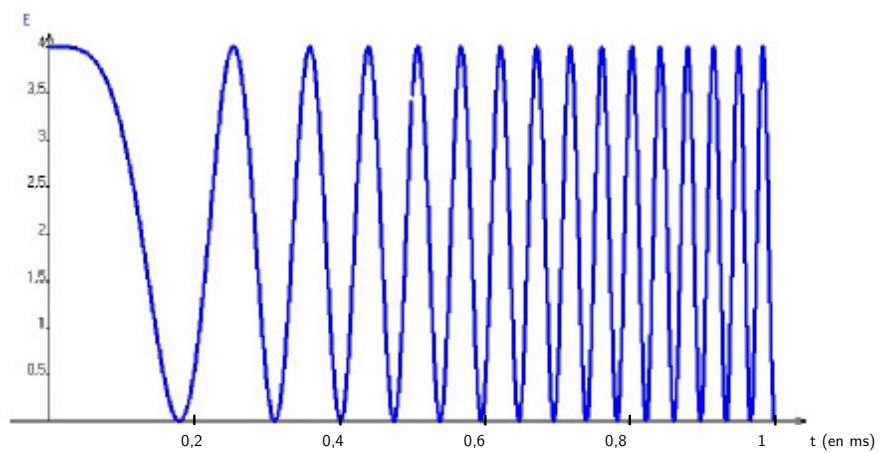


Figure 3 – Enregistrement en F'