MP 2020/2021

DS n°1

Remarques générales sur la présentation des copies de Concours :

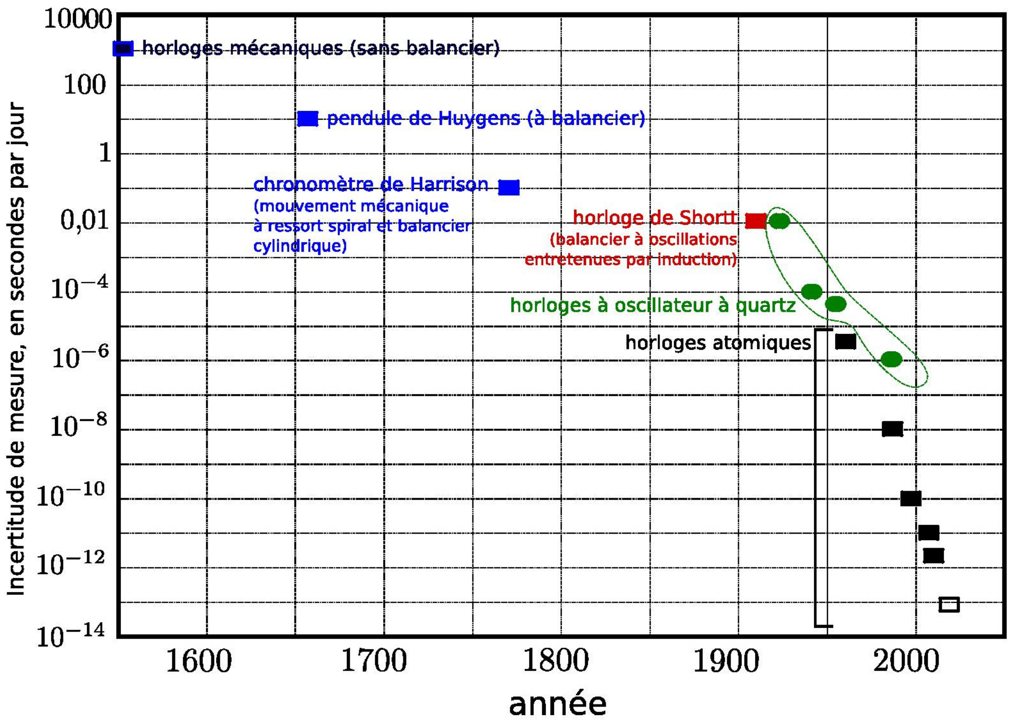
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
- Pour plus de clarté dans la présentation, **il est impératif de changer de copie pour chaque problème ou exercice et de numéroter vos copies (1/N, 2/N…)**

PROBLEME N°1 : La révolution de l'horloge à quartz

D'après Concours EPITA MP 2020

Introduction

La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques… La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui (voir graphique ci-dessous).

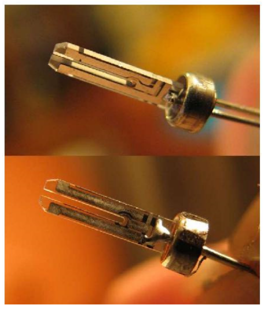


Dans ce sujet on s'intéresse au principe d'une horloge à oscillateur à quartz.

La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.
Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.

© JM DUCRET

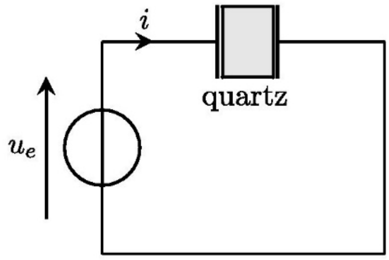
Un cristal de quartz taillé en diapason (comme sur la figure ci-contre) vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits Quartz servant dans des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.



Quartz servant dans une montre
source : https://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock

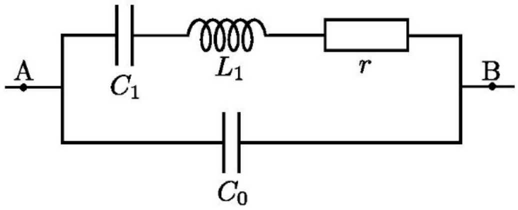
1- Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.
On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_S égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance R = 47 kΩ : si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_S = Ri_0$.
L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé et on utilise le formalisme complexe (j imaginaire pur : $j^2 = -1$)



1-1) Justifier que $\underline{i} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{Z_q}}$ où $\underline{Z_q}$ est l'impédance électrique du quartz.

Electriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r, L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r, L_1, C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.



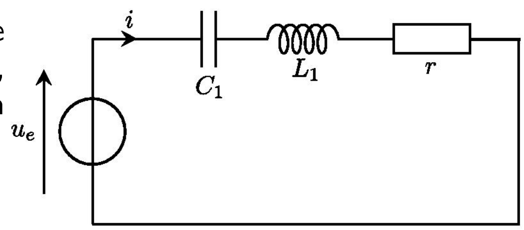
On étudie les résonances en intensité.
Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, r = 0.

1-2) Montrer que l'impédance $\underline{Z_q}$ équivalente au dipôle A-B vérifie : $\dfrac{1}{\underline{Z_q}} = jC_{e}\omega.\dfrac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}$

Avec : $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ et ω_2 et C_{eq} dont on donnera les expressions en fonction de C_0, C_1 et L_1.

1-3) En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

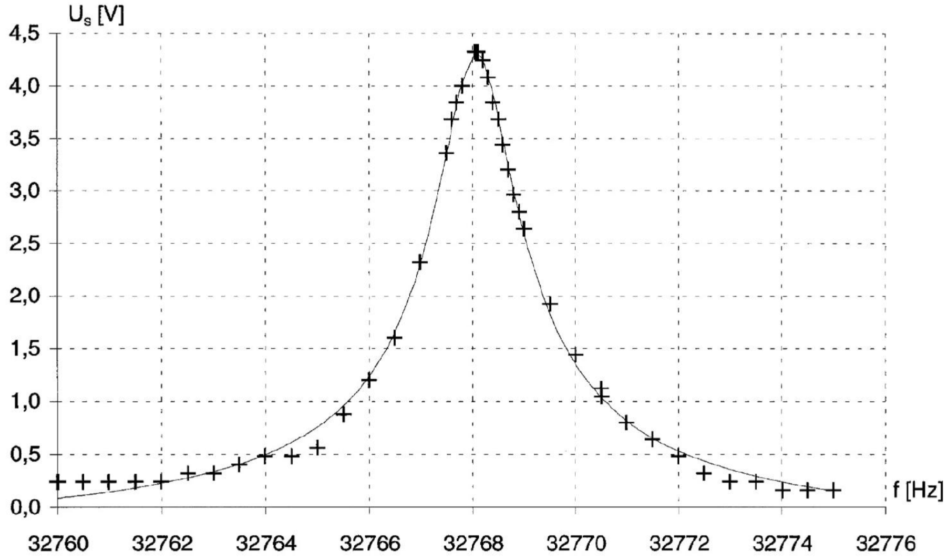
Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0. On obtient alors le circuit ci-contre.



1-4) Montrer que : $\underline{i} = \dfrac{\dfrac{\underline{u_e}}{r}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}\right)}$

On exprimera Q en fonction r, L_1, et C_1.
La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de $U_S = Ri_0$ pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. L'amplitude du signal u_e est u_0 = 0,20V.

© JM DUCRET



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

1-5) Rappeler la définition de la bande passante. Donner sans calcul son expression en fonction de la fréquence de résonance et Q.

1-6) Donner l'expression de i_0 puis de U_S en fonction des données.

1-7) En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r.

1-8) Toujours en exploitant le graphique, donner les valeurs de la pulsation à la résonance ω_1 et du facteur de qualité Q.

1-9) Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q, r et ω_1. En déduire la valeur de L_1.et de C_1 Commentaire ?

2- Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

2-1) A partir le l'expression de i obtenu à la question 1-4), déduire l'équation différentielle vérifiée par i(t). A quel régime amorti satisfait i(t) ?
Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit "oscillateur", qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32 768 Hz.

2-2) On peut remarquer que 32 768 = 2^{15}. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?

© JM DUCRET

PROBLEME N°2 : Capteur de niveau de gazole dans une citerne.

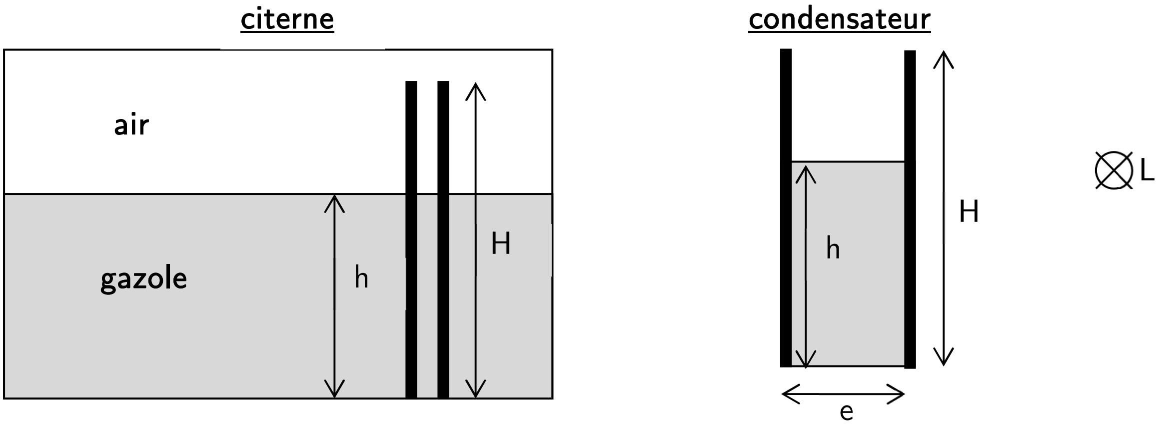
(D'après E3A PSI 2016)

A / Capacité du capteur

On souhaite mesurer la hauteur h de gazole dans une citerne à l'aide d'un capteur capacitif. Ce dernier peut être assimilé à un condensateur plan de capacité C(h), fonction de h et constitué de 2 armatures rectangulaires en cuivre de hauteur H, de largeur L et distantes de e.

H correspond également à la hauteur maximale de gazole dans la citerne.

L'espace entre les armatures est rempli en partie de gazole sur une hauteur h et en partie d'air.



On admet que la capacité d'un condensateur plan rempli d'un isolant de permittivité relative ε_r vaut $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$.

A1. Montrer que l'association en parallèle de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 est équivalente à un seul condensateur de capacité $C_{eq} = C_1 + C_2$.

A2. En déduire l'expression de C(h) en fonction de h, H, L, e, ε_r (permittivité relative du gazole) et ε_0.

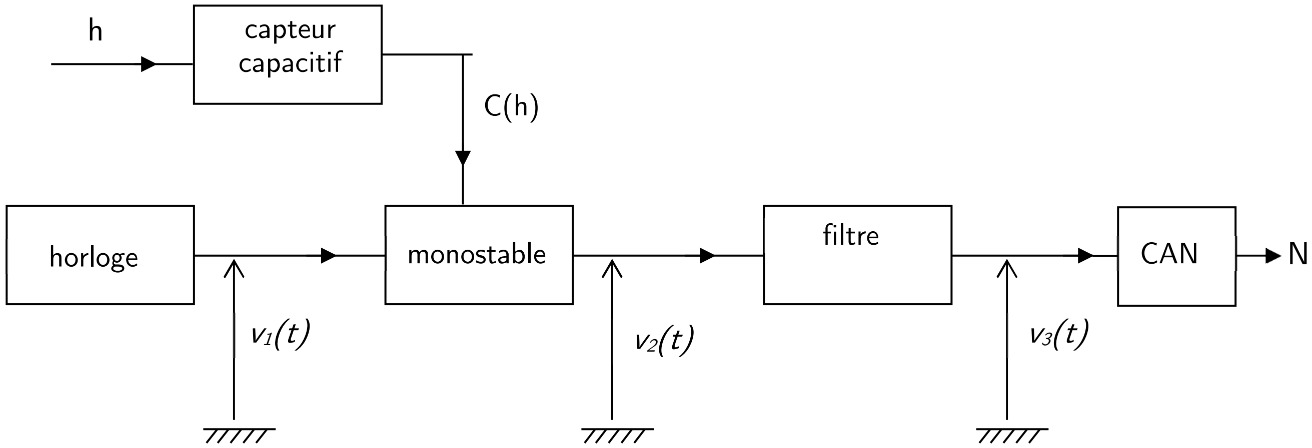
A3. Vérifier que C(h) peut s'écrire numériquement suivant la formule suivante :

$$C(h) = 118.(1{,}00 + 4{,}00.h) \text{ avec } C(h) \text{ en pF et h en m}$$

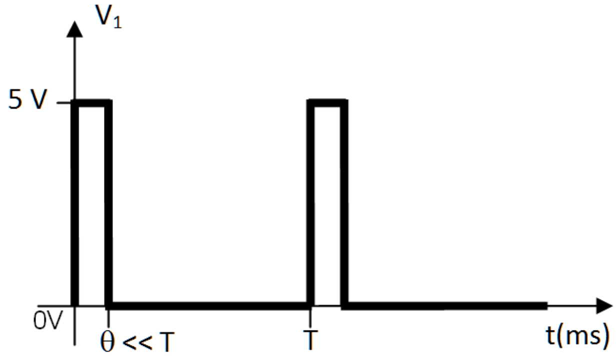
Calculer les valeurs C_{min} et C_{max} de C(h) quand la citerne est respectivement vide et pleine.

B / Chaine de mesure

La chaine de mesure est décrite de manière synoptique sur le schéma ci-dessous. L'objectif est d'obtenir une tension $v_3(t)$ proportionnelle à C(h).



Un monostable est un circuit possédant deux états en sortie. Un état stable (durée indéfinie) et un état instable de durée T_0 fixe. Le passage à l'état instable se produit sous l'effet d'une impulsion de commande délivrée par le signal d'horloge de période T = 2,00 ms et dont l'état haut a une durée θ très petite devant T (voir document ci-après). On impose $T_0 < T$.



Le condensateur étudié en partie B est inséré dans le circuit électronique (non étudié ici) du monostable ; on admet que dans ces conditions T_0 (appelée durée propre du monostable) est proportionnelle à C(h) :

$T_0 = R.C(h)$ où R est un facteur de proportionnalité.

La notice technique du monostable indique par ailleurs qu'en fonctionnement normal :

- T_0 est supérieure à 10,0 µs
- La bascule de l'état stable à l'état instable se réalise quasi-instantanément sur front montant du signal d'horloge.
- La bascule de l'état instable à l'état stable se réalise quasi-instantanément au bout d'un temps T_0
- L'état instable en sortie a pour valeur U_0 = 5,00 V ; l'état stable en sortie a pour valeur 0,00 V.

B1. Expliquer qualitativement pourquoi il est nécessaire d'imposer $T_0 < T$.

B2. Déterminer la plage de variation de R pour que le monostable fonctionne correctement.

B3. On choisit dorénavant R = 2,00 MΩ.

Déterminer la plage de variation de T_0 lors du fonctionnement du capteur capacitif.

B4. Tracer sur la copie, en justifiant, une allure du graphe de $v_2(t)$ pour t entre 0 et 2T en y plaçant U_0, T_0 et T.

B5. Etablir l'expression de la valeur moyenne V_{2moy} de $v_2(t)$ à l'aide de U_0, T et T_0.

En déduire la plage de variation de V_{2moy} lors du fonctionnement du capteur capacitif.

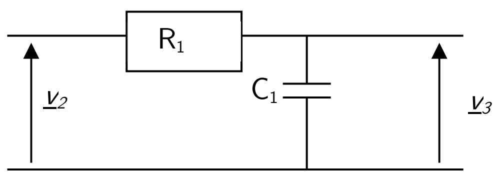
B6. On donne la décomposition en série de Fourier de la tension $v_2(t)$:

$$v_2(t) = V_{2,moy} + \frac{2\,U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right)$$

On désire obtenir en sortie du filtre mentionné dans le schéma synoptique $v_3(t) = V_{2moy}$.

Quel type de filtre faut-il utiliser ?

Montrer que le montage ci-contre convient.



On choisit un conducteur ohmique de résistance R_1 = 220 kΩ

Proposer une valeur numérique de C_1 permettant d'obtenir en sortie du filtre cette valeur moyenne.

On souhaite visualiser le résultat de la mesure de h à l'aide d'un afficheur numérique. Pour cela, on utilise préalablement un CAN (convertisseur analogique numérique) permettant la numérisation de la tension v_3 en un nombre N binaire exprimé sur 8 bits. La valeur maximale admise en entrée du CAN est V_{max} = 5,00 V. La valeur minimale est 0,00 V.

B7. Que vaut le pas (ou quantum) q du CAN ?

On se restreint au cas particulier où T_0 = 1,00 ms.

© JM DUCRET

B8. En raisonnant uniquement sur la première harmonique de $v_2(t)$ (c'est-à-dire $k = 0$), déterminer une condition sur C_1 de manière à ce que la fluctuation de $v_3(t)$ due à cette harmonique n'engendre pas en sortie du CAN de modification de la valeur du nombre binaire N correspondant à V_{2moy}.

DONNEES NUMÉRIQUES

Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
Permittivité relative du gazole :	$\varepsilon_r = 5{,}00$
Hauteur du capteur capacitif :	H = 1,00 m
Largeur du capteur capacitif :	L = 4,00 cm
Distance entre les armatures :	e = 3,00 mm

© JM DUCRET