

DS n°3

Remarques générales sur la présentation des copies de Concours :

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
- Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
- Pour plus de clarté dans la présentation, **il est impératif de changer de copie pour chaque problème ou exercice et de numérotter vos copies (1/N, 2/N...)**

L'usage des calculatrices est autorisé

Vous indiquerez en en-tête de votre copie le type de sujet choisi :

Sujet « Type CCINP » = Problèmes 1 et 2a + Questions « Bonus »

Sujet « Type Mines Ponts » = Problèmes 1 et 2b + Questions « Bonus »

Questions « Bonus » : Pendule simple

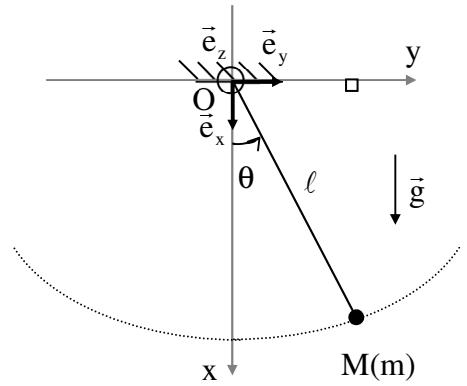
Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse $m = 10\text{g}$, suspendu à un point O , origine d'un repère galiléen $R(Oxyz)$ par un fil sans masse de longueur ℓ . On note θ l'angle que fait le fil que l'on supposera constamment tendu avec la verticale Oy de $R(Oxyz)$ (cf. figure ci-contre).

On lance le pendule à l'instant $t = 0$, depuis la position basse ($\theta_0 = 0$) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_y$

1- Par la méthode de votre choix, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m en fonction des données.

2- Résoudre cette équation différentielle dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

3- Calculer la longueur ℓ du fil pour que la période des petits mouvements du pendule soit $T_0 = 1\text{s}$.



On prendra pour norme de l'accélération de la pesanteur la valeur $g = 9,81\text{m.s}^{-2}$.

PROBLEME N°1 : Lumière et changements de référentiels : de l'éther luminifère à la relativité restreinte

D'après Concours CCINP MP 2020

Après le succès des théories ondulatoires de Young et de Fresnel, il restait aux physiciens à expliquer la propagation de la lumière. En 1873, Maxwell publie la forme définitive de ses équations de l'électromagnétisme. À l'instar d'une onde mécanique, la lumière est conçue comme la vibration d'un "milieu support" présent partout dans l'univers : l'éther luminifère. Puis en 1905, Einstein fonde la théorie de la relativité restreinte sur le principe de relativité (qui énonce que toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel)) et sur le postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide : le caractère absolu du temps est remis en question, la transformation de Galilée est remplacée par celle de Lorentz, l'éther luminifère peut enfin être abandonné. La question de son existence restera cependant une des grandes quêtes de la Physique jusque dans les années 1930.

Les parties I et III de ce problème abordent deux expériences à propos de l'éther restées célèbres dans l'histoire des sciences.

Point de vue général

On souhaite reprendre les raisonnements historiques à propos de l'éther tenus par les physiciens pré-relativistes.

On introduit pour cela le référentiel de l'observateur noté (Robs) et on considère l'éther comme un fluide en mouvement à la vitesse \vec{w} dans (Robs) , ce qui définit le référentiel de l'éther (Reth) . La lumière, qui est une oscillation de l'éther, se propage dans celui-ci de manière isotrope : quelle que soit sa direction, le vecteur vitesse de propagation de la lumière dans (Reth) , noté \vec{c} , a pour norme $c = 299\ 792\ 458\ \text{m s}^{-1}$ (valeur qui sera arrondie à $3,0 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$ pour les applications numériques).

Consigne : en nous plaçant à l'époque des physiciens pré-relativistes, nous utiliserons la transformation galiléenne des vitesses et ferons comme si nous ne savions pas que c est une constante universelle de la Physique.

Partie I - L'expérience "MM" : Michelson et Morley (1887)

Le schéma de principe du dispositif que Michelson et Morley utilisèrent en 1887 est représenté en **figure 1**. Il s'agit d'un interféromètre de Michelson réglé au contact optique avec L la longueur commune des bras de l'interféromètre : $L = OH_1 = OH_2$. L'ensemble Séparatrice-Compensatrice est modélisé comme une lame semi-réfléchissante d'épaisseur nulle, placée à 45° du faisceau incident et n'introduisant aucun déphasage supplémentaire sur les trajets lumineux. Les deux faisceaux lumineux obtenus après division d'amplitude suivent des trajets selon les axes Ox et Oy perpendiculaires. On observe les franges d'interférences à l'aide d'un oculaire micrométrique placé à la sortie de l'appareil.

À l'entrée de l'interféromètre, un filtre interférentiel isole la raie H_α du rayonnement solaire. On note ν la fréquence de la lumière monochromatique ainsi obtenue.

Le référentiel d'observation (R_{obs}) est ici le référentiel terrestre dans lequel les miroirs M_1 et M_2 sont immobiles. L'air est assimilé au vide et nous considérerons qu'il n'a aucune influence sur la propagation. En revanche, l'ensemble du dispositif baigne dans l'éther en mouvement à la vitesse $\vec{w} = w\vec{e}_x$ uniforme avec $w > 0$ (mouvement appelé "vent d'éther").

Configuration α : l'interféromètre est positionné de telle sorte que le trajet lumineux sur le bras n° 1 soit colinéaire au vent d'éther. Le bras n° 2 est perpendiculaire à cette direction.

Configuration β : on fait subir à l'ensemble $S = \{\text{Source, interféromètre, observateur}\}$ une rotation de 90° autour de l'axe Oz dans le sens horaire, de telle sorte que ce soit le bras n° 2 qui devienne colinéaire au vent d'éther.

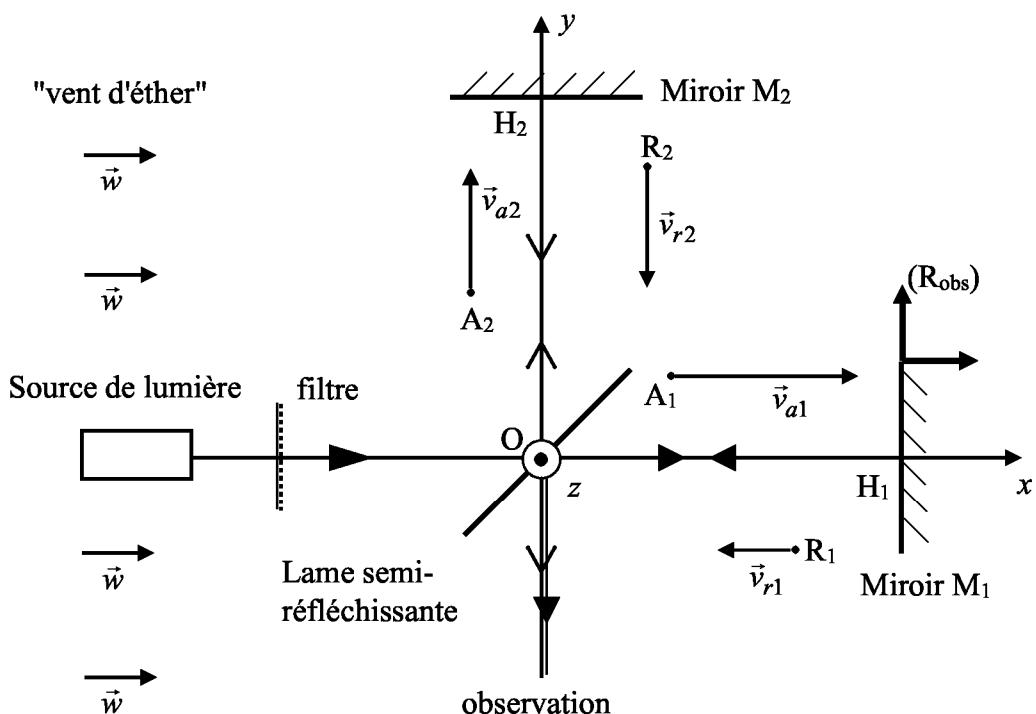


Figure 1 - Schéma de l'interféromètre de Michelson dans la configuration α

L'interféromètre est dans la configuration α (**figure 1**). On appelle A_1 , un point quelconque entre O et H_1 sur le trajet lumineux aller du bras n° 1 et R_1 un point sur le trajet retour. On note de même A_2 et R_2 deux points entre O et H_2 sur les trajets aller et retour du bras n° 2.

En utilisant l'indice $i = 1$ ou 2 pour indiquer la voie de l'interféromètre et l'indice $\varepsilon = a$ ou r pour indiquer le sens aller ou retour, on note $\vec{v}_{\varepsilon i}$ la vitesse de la lumière dans (R_{obs}) et $\vec{c}_{\varepsilon i}$ sa vitesse dans (R_{eth}) . Par souci de lisibilité les quatre points A_1 , A_2 , R_1 et R_2 et les vitesses $\vec{v}_{\varepsilon i}$ ont été représentées hors des trajets des rayons lumineux.

- Q1.** Reproduire la **figure 1** et la compléter en dessinant les "triangles des vitesses" reliant les vecteurs $\vec{v}_{\varepsilon i}$, $\vec{c}_{\varepsilon i}$ et \vec{w} aux points A_1 , A_2 , R_1 , et R_2 en supposant qu'une loi de composition galiléenne des vitesses s'applique.

Attribuer à chaque expression fournie ci-dessous la norme $v_{\varepsilon i}$ correspondante :

$$c - w ; \sqrt{c^2 - w^2} ; c + w ; \sqrt{c^2 + w^2} .$$

- Q2.** En déduire l'expression de la différence $\tau(\alpha) = \tau_2(\alpha) - \tau_1(\alpha)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration α .

Faire un développement limité de $\tau(\alpha)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$.

Donner alors l'expression de l'ordre d'interférence $p(\alpha)$ en fonction de la fréquence ν , de L , de c et du rapport $\frac{w}{c}$ (on rappelle que l'ordre d'interférence de deux signaux lumineux cohérents entre eux et présentant un déphasage φ est égal à $\varphi/2\pi$).

- Q3.** Avec le moins possible de calculs, donner de même les expressions :

- de la différence $\tau(\beta) = \tau_2(\beta) - \tau_1(\beta)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration β ;
- du développement limité de $\tau(\beta)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$;
- de l'ordre d'interférence $p(\beta)$ en fonction de ν, L, c et du rapport $\frac{w}{c}$.

- Q4.** Soit $\Delta p = p(\beta) - p(\alpha)$ la variation de l'ordre d'interférence produite lors du passage de l'interféromètre de la configuration α à la configuration β . Montrer que $\Delta p = 2L \frac{\nu}{c} \left(\frac{w}{c} \right)^2$.

- Q5.** De manière à visualiser un petit nombre de franges d'interférence à l'oculaire micrométrique, on règle l'interféromètre en coin d'air à partir de la configuration α en opérant une toute petite rotation du miroir M_1 autour de son diamètre H_1Z . La figure d'interférences se présente alors comme un ensemble de franges rectilignes parallèles équidistantes d'interfrange i .

En supposant la variation Δp de l'ordre d'interférence obtenue en **Q4** inchangée par ce nouveau réglage, indiquer quelle modification de la figure d'interférences est attendue lors du passage de la configuration α à la configuration β . Exprimer cette modification à l'aide de Δp et i .

Q6. En faisant l'hypothèse d'un éther immobile dans le référentiel héliocentrique et ne subissant aucun effet d'entraînement par l'atmosphère terrestre, Michelson et Morley comptaient observer cette modification avec une vitesse de vent d'éther de norme $w = 30,0 \text{ km s}^{-1}$ environ.

- Rappeler la définition du référentiel héliocentrique.
- Énoncer, sans les démontrer, les trois lois de Képler pour une planète autour du Soleil.
- Expliquer à quelle caractéristique terrestre correspond la valeur $w = 30,0 \text{ km s}^{-1}$ escomptée par Michelson et Morley. Retrouver cette valeur à partir de G (constante de Newton), M_s (masse du Soleil) et T_{an} (durée de l'année terrestre).

Faire l'application numérique avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$, $M_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ et $T_{an} = 365,25 \text{ jours}$.

Q7. Pour passer de la configuration α à la configuration β , Michelson et Morley avaient monté leur interféromètre sur une table en granit posée au-dessus d'un flotteur en bois sur un bain de mercure, ce qui leur permettait d'opérer une rotation de l'ensemble en toute simplicité (**photo 1**).

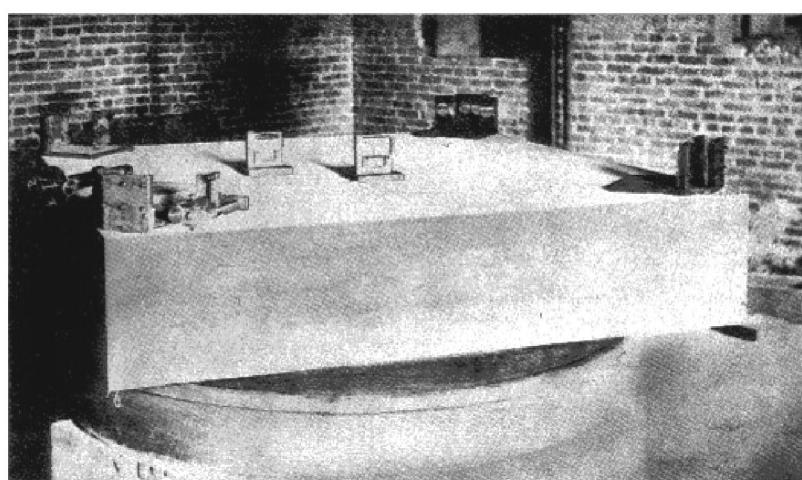


Photo 1 - L'interféromètre utilisé par Michelson et Morley en 1887
(source : http://ondes-relativite.info/DomniqueCabala/chap4_histo.htm)

Une grande longueur des bras de l'interféromètre (obtenue par un rallongement des trajets à l'aide de plusieurs jeux de miroirs) et un oculaire micrométrique avaient été prévus afin d'assurer une détection confortable des modifications attendues de la figure d'interférences. La sensibilité du dispositif était de l'ordre du centième d'interfrange.

Avec $w = 30,0 \text{ km s}^{-1}$, $L = 11,2 \text{ m}$ et $v = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, donner la valeur numérique de Δp , variation de l'ordre d'interférence escomptée par Michelson et Morley, exprimée en **Q4**. Commenter.

Q8. Donner une estimation numérique de la vitesse d'éther minimale que le dispositif permettait de mesurer *a priori*. Quelle(s) objection(s) aurait-on pu faire quant au résultat de l'expérience finalement annoncé négatif par Michelson et Morley ? Pourquoi l'expérience fut-elle reconduite à différents moments de l'année ?

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley a révélé la mise en défaut de la transformation de Galilée. Cette dernière conduit également à des lois erronées de changement de référentiel pour le champ électromagnétique. C'est l'objet de la partie II ci-après.

En 1924, la théorie de la relativité restreinte a presque vingt ans, mais les physiciens n'ont toujours pas tranché définitivement la question de l'éther, surtout qu'en 1913, un jeune physicien français, Georges Sagnac, découvre un effet qui va relancer le débat : en faisant circuler sur un même trajet fermé, mais en sens inverse, deux rayons lumineux émis à partir d'une source, Sagnac mesure un décalage des franges d'interférences lorsque le plateau sur lequel repose l'ensemble du dispositif est mis en rotation à la vitesse de quelques tours par seconde. Le décalage mesuré est proportionnel à la vitesse angulaire du plateau et à l'aire de la boucle suivie par la lumière. Cet effet, qui semble révéler une anisotropie de la vitesse de la lumière dans un référentiel en rotation, serait-il la preuve tant attendue de l'existence de l'éther ? Michelson, Gale et Pearson mettent alors sur pied une version modifiée de l'expérience de 1887 dans le but de tester les deux théories (éther lumineux et relativité restreinte) en mesurant l'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre. Cette rotation étant bien plus lente que la rotation du plateau utilisé par Sagnac, il fallait construire un interféromètre aux dimensions "gigantesques". La **partie III** traite de cette expérience "hors normes".

Partie III - L'expérience "M-G-P" : Michelson-Gale-Pearson (1924), ou de la mesure de l'effet Sagnac à l'échelle de la Terre

La Terre est supposée sphérique de rayon R_T et animée d'un mouvement de rotation uniforme d'Ouest en Est autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$. Seul l'hémisphère nord a été représenté en **figure 3**. Un point quelconque sur cet hémisphère est repéré par ses coordonnées géographiques : latitude φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) comptée à partir de l'équateur vers le Nord et longitude θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) comptée à partir du méridien de Greenwich vers l'Ouest.

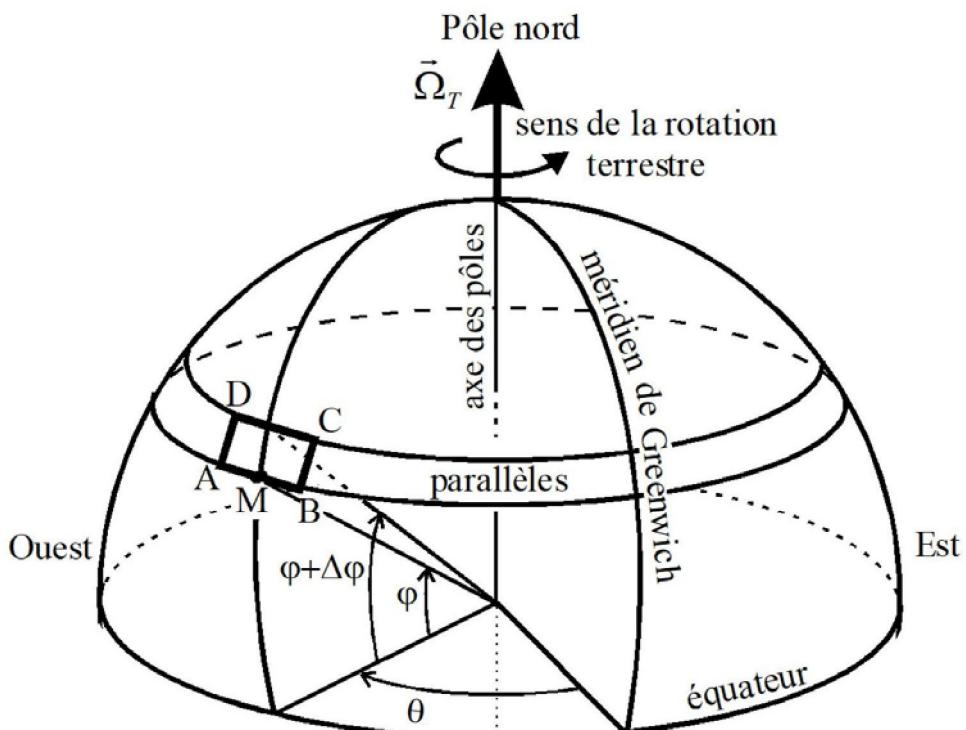


Figure 3 - Coordonnées géographiques d'un point M dans l'hémisphère nord et interféromètre de Michelson-Gale-Pearson à boucle rectangulaire ABCD

Q17. Rappeler la définition du référentiel géocentrique (R_g). Quel est le mouvement de la Terre dans (R_g) ? Relier la norme Ω_T du vecteur $\vec{\Omega}_T$ à la durée T_j du jour terrestre.

Dans cette partie, on fait l'hypothèse d'un éther immobile dans (R_g) et on étudie les effets du "vent d'éther" dus à la rotation terrestre.

Q18. Dans quelle direction et dans quel sens "souffle le vent d'éther" pour un observateur terrestre ? On note $\vec{w}(\varphi) = w(\varphi)\vec{e}$ la vitesse du vent d'éther à la latitude φ , avec \vec{e} le vecteur unitaire adéquat pour que $w(\varphi)$ soit positive. Exprimer $w(\varphi)$ en fonction de R_T , Ω_T et φ .

La **figure 4** représente schématiquement le dispositif de Michelson-Gale-Pearson utilisé en 1924. Celui-ci s'inspire de l'interféromètre à boucle fermée utilisé par Sagnac en 1913.

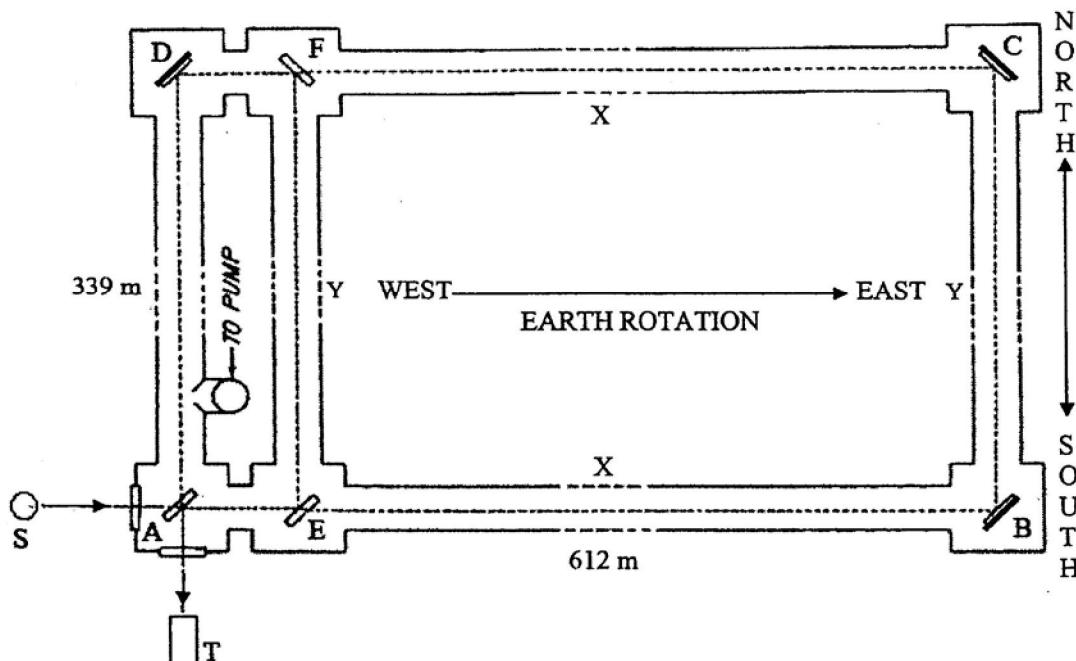


Figure 4 - Schéma de l'interféromètre utilisé dans l'expérience de Michelson-Gale-Pearson
 (source : "A review of Michelson-Morley, Sagnac and Michelson-Gale-Pearson experiments",
the general science journal, M. D. Abdullahi)

Il s'agit d'un interféromètre à boucle rectangulaire, de largeur $Y = AD = BC = 339$ m et de longueur $X = AB = DC = 612$ m installé sur un vaste champ à Clearing, en Illinois. Les côtés longs, AB et DC, de ce rectangle sont dirigés d'Ouest en Est, en suivant deux parallèles de latitudes respectives φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (**figure 3**). Les petits côtés AD et BC qui complètent le rectangle occupent la direction Sud-Nord locale.

Cette "piste" rectangulaire était conçue à partir de tubes en fonte hermétiquement liés, dans lesquels un dispositif de pompage avait été prévu pour assurer un vide de bonne qualité.

La **photo 2** montre à quoi ressemblait l'installation de la plus extraordinaire expérience d'interférométrie jamais réalisée jusqu'alors.



Photo 2 - L'installation de Michelson-Gale-Pearson à l'hiver 1924 dans un vaste champ à Clearing, en Illinois

On peut remarquer dans la partie gauche de la **figure 4** un tube supplémentaire EF, formant avec AD une boucle rectangulaire AEFD d'aire beaucoup plus petite que le rectangle principal ABCD. Nous évoquerons plus loin le rôle de ce rectangle secondaire.

Aux sommets A, E et F, sont placées des lames semi-réfléchissantes orientée à 45° par rapport aux côtés et en B, C et D se trouvent trois miroirs plans également inclinés à 45° afin d'assurer des trajets lumineux parallèles aux axes de symétrie des tubes. Pour simplifier l'étude, on considérera que les lames ont toutes une épaisseur nulle.

Un rayon de lumière issu d'une source S est divisé en deux rayons, l'un transmis et l'autre réfléchi par la lame A. Les deux rayons de lumière sont ainsi injectés en sens inverse le long du rectangle ABCD, en se réfléchissant sur les miroirs aux coins B, C et D, pour revenir sur la lame A et finalement interférer dans le plan focal image de l'objectif d'un télescope T.

Q19. a) On note τ_0 la durée que met la lumière à parcourir la distance cumulée $2Y$ entre les deux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (il est inutile de chercher à déterminer sa valeur).

À l'aide de deux lois de composition galiléenne des vitesses aux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$, exprimer en fonction de τ_0 , c , X et des composantes de vitesse du vent d'éther $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$, la durée de parcours τ_1 de la lumière dans son trajet ABCDA.

b) Faire le développement limité de τ_1 à l'ordre 1 en $\frac{w(\varphi)}{c}$ et en $\frac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}$, puis à l'ordre 1 en $\Delta\varphi$ (on rappelle que $w(\varphi + \Delta\varphi) \approx w(\varphi) + w'(\varphi)\Delta\varphi$ où $w'(\varphi)$ désigne la dérivée de $w(\varphi)$). En faisant apparaître Y, établir que la durée τ_1 peut s'écrire sous la forme $\tau_1 = \tau_0 + \frac{2X}{c} + \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi)$ dans laquelle on explicitera $f(Y, \varphi)$.

c) Exprimer de même la durée de parcours τ_2 de la lumière effectuant le trajet ADCBA en fonction de τ_0 , c , X, $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$. Un calcul non demandé analogue à celui de

$$\text{Q19.b} \text{ conduit à } \tau_2 = \tau_0 + \frac{2X}{c} - \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi).$$

Q20. On suppose la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note $\Omega_n = \Omega_T \sin \varphi$ la composante du vecteur $\vec{\Omega}_T$ sur la direction de la normale au plan ABCD orientée vers le ciel (zénith local) et $S = XY$ l'aire du rectangle ABCD délimité par le trajet lumineux. Établir que le déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux rayons lumineux à leur arrivée en A est $\Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 c} S \cdot n \cdot \Omega$

Q21. Quel est l'ordre d'interférence p correspondant ?

Q22. Dans l'expérience de Sagnac, un décalage des franges (donc une variation Δp de l'ordre d'interférence) est observé par rapport à la situation où le plateau est immobile. Quelle est la difficulté de la mesure d'une variation Δp dans le cas de la Terre sur le même principe ? Expliquer le rôle du rectangle AEFD, d'aire beaucoup plus petite que S .

Q23. On donne $\varphi = 41^\circ 48' N$, $\lambda_0 = 0,500 \mu m$ et $\Omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$. Calculer Δp .

L'expérience de 1924 a donné $(\Delta p)_{\text{exp}} = 0,26 \dots$ L'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre existe donc bel et bien, mais seule la relativité peut en donner le calcul correct.

PROBLEME N°2a : TRAJECTOIRES DES PLOMBS D'UNE CARTOUCHE

D'après Concours CCP MP 2017

Ce sujet s'intéresse à des aspects de sécurité d'un usage particulier, très répandu dans le monde, du métal plomb Pb. La partie I se propose d'étudier les trajectoires décrites par la gerbe de plomb d'une cartouche de chasse

Les données utiles sont placées au début du sujet. De nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres. Le candidat peut utiliser une formule donnée dans l'énoncé, sans l'avoir démontrée, pour continuer à répondre aux questions posées dans la suite du sujet.

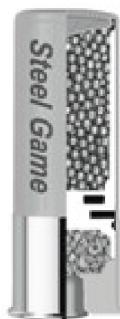
Données

- On suppose l'accélération de la pesanteur égale à $\vec{g} = -g\hat{k}$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
- Masse volumique du plomb solide : $\rho = 11\,350 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$.

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$, valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

Document 1

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature). La photographie ci-dessous est celle d'une cartouche en partie dénudée.



La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenade de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs × 100 = zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm : $3 \times 100 = 300 \text{ m}$.

Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho_a S C_D v \vec{v},$$

où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et C_D est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, C_D est de l'ordre de 0,44.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du plomb de masse m .

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de trainée aérodynamique.

Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

Q2. Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0 , obéissant à l'inégalité

$$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}.$$

$$\text{Par la suite on notera } v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}.$$

Q3. Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne (**figure 1**, page 4). On note θ l'angle de la vitesse \vec{v} avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial. On prend un repère tel que $\vec{v}_0 = v_0 (\cos \theta_0 \vec{i} + \sin \theta_0 \vec{j})$ et dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

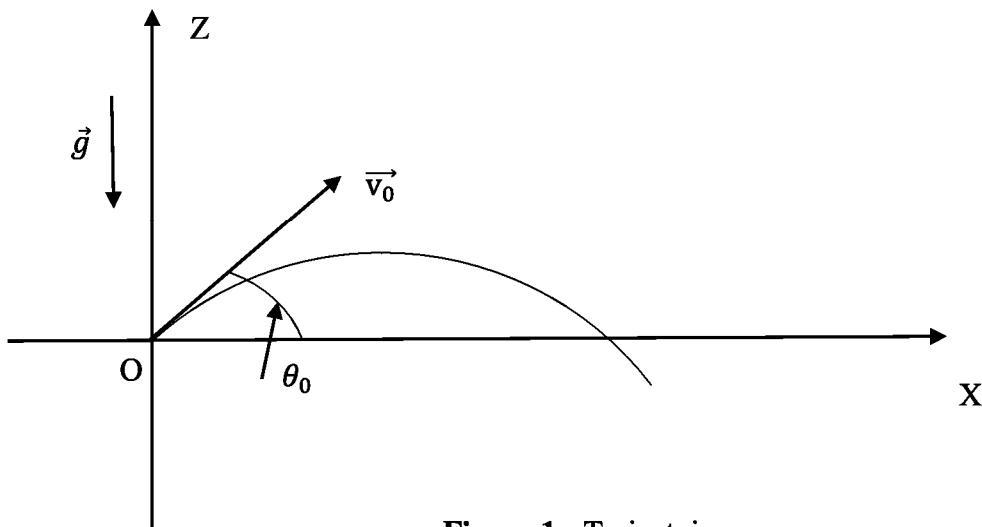


Figure 1 - Trajectoire

- Q4.** Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.
- Q5.** Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
- Q6.** Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ($Z = 0$), vaut

$$X_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} .$$

- Q7.** Donner la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée est maximale.

Q8. Application numérique

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0,25 mm par numéro. Une cartouche de n° 8 possède des plombs plus petits qu'une de n° 4. Le tableau 1 ci-dessous donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$.

n° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	?	0,031
Portée X_M (km)	?	?	?
Hauteur H_M (km)	?	?	?
v_∞ (m.s ⁻¹)	33	?	22

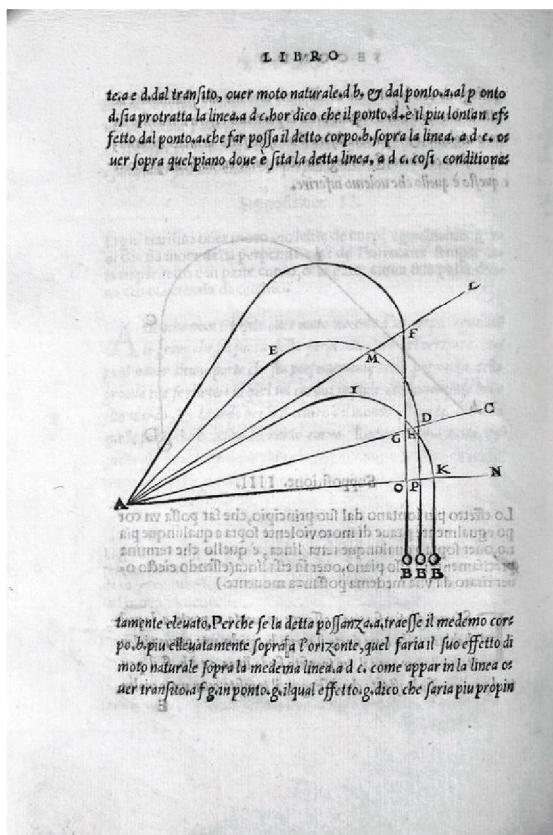
Tableau 1

Reporter le tableau 1 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

- Q9.** Comparer la portée maximale, obtenue pour un angle $\theta_0 = 45^\circ$, à la portée donnée dans le document 1 (pages 2-3) et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse, v_0 est très supérieure à v_∞ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balistique Niccolò Tartaglia (XVI^e siècle, portrait ci-dessous), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-dessous) d'un boulet de canon.



Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit OX' la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note X' l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec OX et \vec{v} sa vitesse (**figure 2**, page 6).

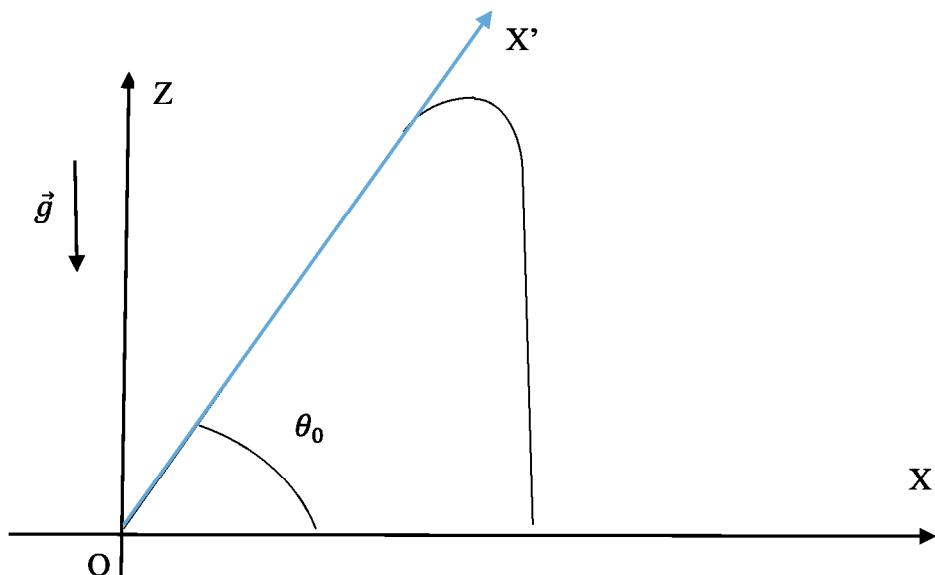


Figure 2 - Trajectoire de Tartaglia

Q10. Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.

Q11. Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dx'} = - \frac{g}{v_\infty^2} \vec{v} = \frac{1}{D} \vec{v}.$$

Q12. Quelle est la dimension de D ?

Q13. Établir l'expression de \vec{v} en fonction de X' .

Que représente le paramètre D ?

Q14. On note d la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre une vitesse $10 v_\infty$, v_u la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et Ec l'énergie cinétique correspondante. Le tableau 2 ci-dessous donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380$ m.s⁻¹.

n° du plomb	1	5	10
$D(m)$	110	?	50
v_0/v_∞	11	?	17
$d(m)$	15,5	?	27
v_u (m.s ⁻¹)	270	?	170
Ec (J)	13,5	?	0,45

Tableau 2

Reporter le tableau 2 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

Q15. Comment définiriez-vous la portée utile d'un tir ?

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

Q16. En supposant qu'il suffit de 2 plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ?

En déduire l'ordre de grandeur de la portée utile à l'aide de l'évaluation du paramètre D précédemment défini.

Q17. Comparer aux valeurs données dans le **document 1** (pages 2-3).

Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique $\rho' = 7\,600 \text{ kg.m}^{-3}$?

Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenade ?

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

Q18. À quoi correspond-elle ?

Q19. Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\overrightarrow{v_\infty} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\pi R^2 C_D}} (-\vec{k}).$$

Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

Q20. Pourquoi qualifie-t-on cette phase de « phase gravitaire » ?

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

$$X_M \approx \frac{D \cos(\theta_0)}{2} \ln \left[1 + 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin(\theta_0) \right] = H \cotan(\theta_0).$$

Q21. Évaluer numériquement les portées maximales des numéros 1, 5 et 10 de plombs, pour $\theta_0 = 16^\circ$.
Comparer aux valeurs données dans le **document 1** (pages 2-3).

Le même calcul donne également l'expression approchée de l'angle initial permettant d'optimiser la portée maximale X_M .

$$\theta_{max} \approx \arctan \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2}{[1 + 2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2][\ln(1 + 2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2)]}} \right).$$

Q22. La **figure 3** (page 8) donne la courbe θ_{max} , (en degrés) fonction de $\log(v_0/v_\infty)^2$. Identifier la valeur de θ_{max} pour les trois numéros de plomb considérés.

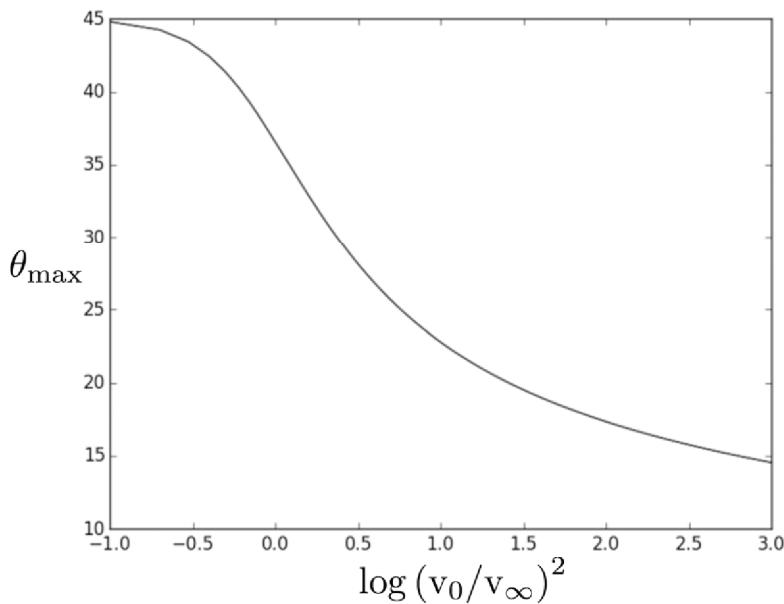


Figure 3 - Angle initial optimal

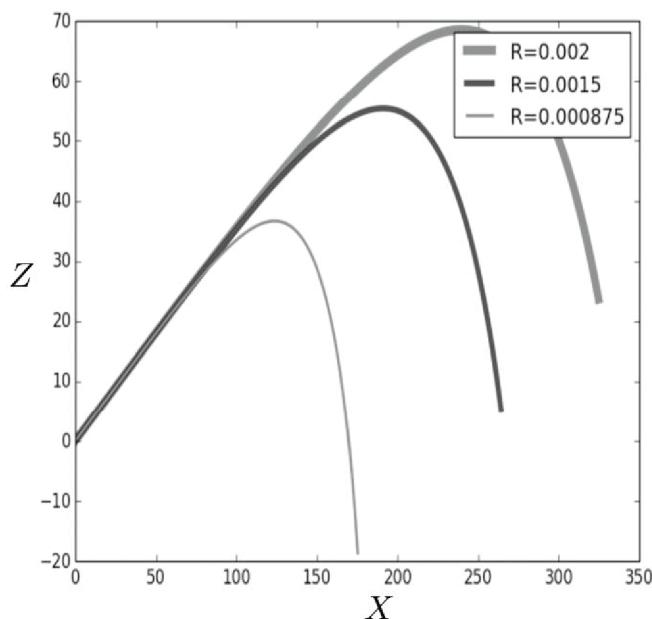


Figure 4 - Trajectoires de différents plombs

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenade de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement.

La **figure 4** donne les trajectoires des plombs n° 1, 5 et 10 de vitesse initiale 380 m.s^{-1} , pour l'angle θ_0 optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

Q23. Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du **document 1** (pages 2-3).

PROBLEME N°2b : NATURE DE LA GRAVITATION - L'EXPERIENCE D'EÖTVÖS

(*Extrait Epreuve Concours Mines Ponts MP 2015*)

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par GALILÉE au début du XVII^e siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, NEWTON fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.

Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes. Étoiles, galaxies...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommée antigravité.

La première partie propose une description de l'expérience d'Eötvös ayant permis, dès la fin du XIX^e siècle de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque.

Les données numériques sont rassemblées en fin d'épreuve. Les vecteurs sont repérés par une flèche (\vec{v}) ou par un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\hat{u}_x\| = 1$).

- 1 — Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le non de masse inerte m_i .
- 2 — Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielles m_i et graves (ou pesantes) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielles et graves, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par GALILÉE, a été menée par NEWTON (1686) ou encore BESSEL (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5} . L'invention du pendule de torsion par EÖTVÖS autour de 1888, permit d'augmenter fortement la sensibilité.

A. — Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'EÖTVÖS utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées S_1 et S_2 , homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C . On note m_1 et m_2 les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2 . La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz .

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ . Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette.

On note R le référentiel du laboratoire centré sur O et *supposé galiléen dans cette sous-partie* où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport à (Oz). On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le

fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O a pour intensité $M_0 = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

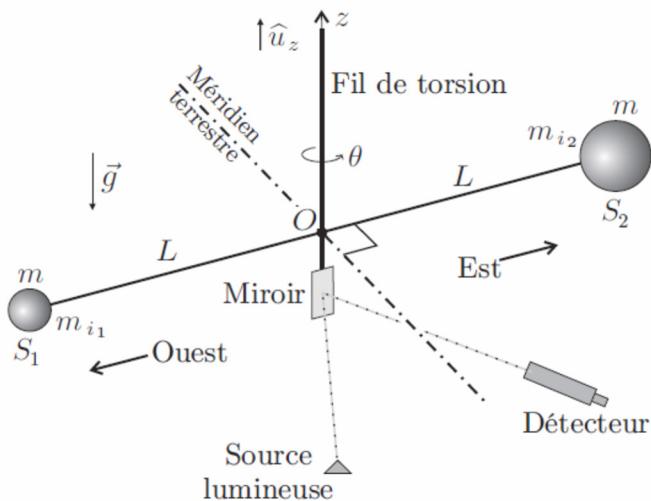


Fig. 1 – Dispositif d'Eötvos

□ 3 — Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de S en fonction de C et $\theta - \theta_0$, on choisira $E_p(\theta_0) = 0$. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide S . En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C , J , θ , θ_0 et $\dot{\theta} = d\theta / dt$

□ 4 — On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $P_{frot} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

□ 5 — On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes J , C et α ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}}$. À quelle condition sur ε ,

l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1%? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0, 2 \text{ kg}$. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous:

$L [\text{m}]$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
$T [\text{s}]$	436	509	581

□ 6 — En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2 , L^2 , J_0 , J_1 , m et C . à partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C . Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T montrer que l'on peut écrire :

$$m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}.$$

B. — Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel R du laboratoire centré sur O n'est plus supposé galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes m_1 et m_2 a priori différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel Rt attaché au centre de gravité G de la terre supposé galiléen.

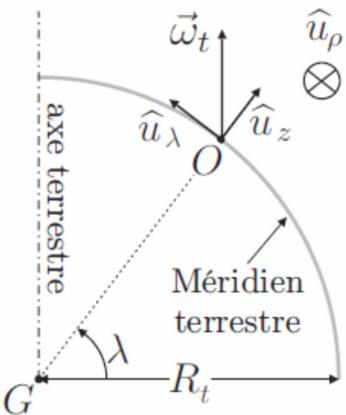


Fig. 2 – Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse $\vec{\omega}_t$ (de norme ω_t) autour de l'axe terrestre et le point O se trouve à la latitude λ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2. L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur $\theta_{\infty 1}$ pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur $\theta_{\infty 2}$ pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

.

- 7 — Déterminer les composantes des forces d'inertie d'entraînement subies par m_1 et m_2 dans la base $(\hat{u}_z, \hat{u}_\rho, \hat{u}_\lambda)$ en fonction de λ , L , ω_t , R_t , m_1 ou m_2
- 8 — En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2}$ entre les deux expériences en fonction de λ , C , L , ω_t , R_t , m_1 et m_2 .
- 9 — La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de 1,0 mm à 2,0 m de distance. En utilisant l'expression de m trouvée à la question 6, déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta_m = |m_1 - m_2|/m$. On donne $\lambda = 45^\circ$ et $L = 6,0$ cm.
- 10 — La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?

Formulaire et données numériques relatives à l'ensemble de l'épreuve

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Unités de distance : 1 UA = $1,5 \cdot 10^{11}$ m ; 1 pc = $3,1 \cdot 10^{16}$ m
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg
- Masse de la Terre : $M_t = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre : $R_t = 6,4 \cdot 10^3$ km